# 物理学サポート (第8回)

## 【様々な保存則】

剛体まで勉強したことで、回転運動まで入れた様々な保存則をまとめる。力学では主に以下の 3 つの保存則がある。

- ◆ **運動量保存則** ：$\sum \boldsymbol{p}_i = \sum m_i \boldsymbol{v}_i =$ 一定
  外力の和がゼロの場合に、 質点系の全運動量が保存する。
- ◆ **角運動量保存則**: $\sum \boldsymbol{L}_i = \sum \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i =$ 一定
  外力のモーメントの和がゼロならば、全角運動量が保存する。
- ◆ **エネルギー保存則**：系全体の並進運動＋回転運動＋ポテンシャルエネルギーの和が一定。

**【運動量と力積】** ニュートンの運動方程式を、運動量 $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ を用いて表すと

$$\frac{d\boldsymbol{p}_1}{dt} = \boldsymbol{F}_{21} \tag{1}$$

となる。ここで 1 は物体 1 という意味であり、力 $\boldsymbol{F}_{21}$ とは物体 2 から物体 1 に働く力である。

$$\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = \text{一定} \tag{2}$$

これは物体 1 だけに注目すると (1) 式を時刻 $t$ で積分すると (P68-)、

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\boldsymbol{p}_1}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}_{21} dt \quad \to \boldsymbol{p}_1(t_2) - \boldsymbol{p}_1(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}_{21} dt \equiv \text{力積} \tag{3}$$

この最後の「力を時間で積分したもの」を**力積**という。

この式の意味は**運動量の変化のトータルは力積に等しい**ということである。もし $t_1$ と $t_2$ の時間の間隔が非常に短いときは、力積は

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}_{21} dt \simeq \boldsymbol{F}_{21} \Delta t \quad \to \text{力積＝力} \times \text{時間}$$

である。ここで $\Delta t \equiv (t_2 - t_1)$ とした。

さらに物体 2 に関する運動量と力積の関係式を加える。ニュートンの第三法則である**「作用反作用の法則」**によって、$\boldsymbol{F}_{21} = -\boldsymbol{F}_{12}$ が成り立つ。このような 2 つの物体の間だけに働く力を内力という。つまり 外力がゼロの場合に、2 つの物体の運動量の和が常に一定 となる。

$$\boldsymbol{p}_1(t_1) + \boldsymbol{p}_2(t_1) = \boldsymbol{p}_1(t_2) + \boldsymbol{p}_2(t_2) = \text{一定} \tag{4}$$

これが**運動量保存則**である。

この保存則はかなり一般的に成立する。力学の問題解法では、とくに衝突現象を扱う場合に便利であり、よく使われる。その場合、反発係数 $e$ の関係式、

$$e = -\frac{v_1' - v_2}{v_1 - v_2} \tag{5}$$

を用いて、衝突後の速度 (ダッシュがついた量) が求まる。$e = 1$ が「(完全) 弾性散乱」といって、速度が入れ替わり、エネルギーも保存する。しかしほとんどの衝突は必ず熱などが発生して、エネルギーが失われ、$0 \le e < 1$:「 非弾性散乱」となる。とくに $e = 0$ は、衝突後に一緒の速度になり、「合体する」。いずれの場合も、内力だけなので、運動量は保存する。衝突の際に 2 物体で起こる摩擦力もエネルギーは失われるが、運動量は依然保存されている。[1]

## 演習問題

[1] このページの (1) 式から (4) 式までの文章について、以下の問いに答えよ。

(a) (1) 式からの文章に従って、(3) 式の「運動量の変化＝力積」を確認せよ。

(b) 同様に物体 2 についても「運動量の変化＝力積」の関係を示せ。ここで物体 2 に働く力は、作用反作用の法則によって物体 1 に働く力と逆向きであることに注意せよ。

(c) (3) 式と (b) の結果を使って、(4) 式の運動量保存則を導け。

[1]ただし、床の上を移動中に発生する床との摩擦力や、空気抵抗は外力になるので、この効果が効くと、運動量も保存しない。

[2] 質量 $m_1$ の物体 1 が速度 $v_1$ で、質量 $m_2$, 速度 $v_2$ の物体 2 に弾性衝突する場合を考える。以下の問いに答えよ。物体 1 が後ろから衝突するので暗に $v_1 > v_2$。

(a) 運動量保存則と (5) 式から衝突後の速度 $v_1', v_2'$ を求めよ。

(b) もし $m_1 = m_2$ の場合、速度はどうなるか？

(c) $m_1 \gg m_2$ の場合、速度はどうなるか？
物体 1 を惑星、物体 2 を探査衛星とした場合には、この運動量保存則が「**スイングバイ**」という惑星軌道に近づきながら、惑星の重力を利用して加速 (減速) する方法の原理である。

[3] 質量が変化する場合の運動方程式

質量 $m$ のロケットが速度 $v$ で進んでいる。途中で燃料を噴出して質量を減らす場合を考える。この減少分を $|\delta m|$, $(\delta m < 0)$ とし、噴出後のロケットの速度を $v + \delta v$、燃料のロケットからみた相対速度を $u$ とする。以下の問いに答えよ。

(a) 噴出後の 2 物体の運動量の和を求めよ。

(b) 運動量保存則から以下を示せ

$$m\delta v = -|\delta m|\, u$$

ただし微小量の 2 乗は無視できるとする。この式から捨てた運動量分だけ、ロケットは速度が変化していることがわかる。

(c) この変化が $\delta t$ で起きたとし、全体を $\delta t$ で割ると

$$m\frac{dv}{dt} = -|\frac{\delta m}{\delta t}|u$$

となる。ロケットでは噴出する相対速度は進行方向と逆なので $u < 0$ でもある。したがって、この式からロケットは速度が増加し、加速していることが分かる。

次に (b) で噴出前＝噴出後としたところに、一般に力 $F$ が働いて力積が加わっていた場合は、さらにこの力の分、加速度が変化し、

$$m\frac{dv}{dt} = F - |\frac{dm}{dt}|u$$

となる。これが 質量が変化する場合の運動方程式 である。質量が増す場合にも使える。
上向きに軸をとり、初速度ゼロでロケットを打ち上げる場合、燃料の変化を $\alpha = -\delta m/\delta t > 0$ とすると、$m(t) = m_0 - \alpha t$ となる。これらを上式に代入して、重力加速度を $g$, 相対速度を $u_0 < 0$ として、変数分離を行い積分して、速度 $v(t)$ を求めよ。

==========================================================

**【角運動量保存則】** (1) 式の運動方程式は基本的に、扱う物体は、大きさのない質点 と呼ばれる仮想的な物体であった。大きさがあり変化しない物体 (剛体) を扱う場合は、まずその物体の質量を重心一点に集めて、その重心を質点とみなして、この並進運動を扱う。さらに大きさにより。物体が回転をするので、回転の運動方程式も同時に扱う。角運動量 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = I\boldsymbol{\omega}$ を用いると、

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{N}(= \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}) \tag{6}$$

となる。ここで $\boldsymbol{N}$ は力のモーメントまたはトルクといって、外積で表す。質量に対応する「**回転のしにくさ**」を表す量が慣性モーメント $I$ であり、物体の形状と、回転軸がどこにあるかで値が異なるが、次元は必ず $I \propto mr^2$ となる。

運動量保存のときと同様に 2 物体を考えて、それぞれの (6) 式と作用反作用の法則を用いて変形する。さらに内力が中心力の場合にトルク部分がゼロになり、

$$\boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2 = 一定 \tag{7}$$

が成立する。これが**角運動量保存則**である。角運動量には主に 2 種類がある。

- **軌道角運動量**：$\boldsymbol{r} \times (m\boldsymbol{v})$
- **自転角運動量**：$I\boldsymbol{\omega}$

太陽系などの惑星系を考えると、分かりやすいが、太陽の周りを回る「公転」が軌道角運で、地球の一日回転「自転」が自転角運である。[2]例えば、地球ー月系で考えると、おおよそ以下の全角運動量が保存する。

$$M_m d^2 \omega_m + I_m \omega_m + I_e \omega_e = 一定 \tag{8}$$

ここで $d$ は地球ー月の距離、$m, e$ の添え字は地球、月の意味である。また $I = 2MR^2/5$ は、球形の慣性モーメントであり、$M, R$ はその天体の質量と半径である。$\omega$ は角速度であり、周期 $T$ と $\omega = 2\pi/T$ という関係にある。地球の場合は、もちろん 1 日=24 時間を秒に直した量である。ここで注意することが二つある。一つは地球の公転、つまり (a) 第一項の地球版がないことと、(b) 月の公転周期＝自転周期、つまり一項目と二項目の $\omega_m$ が同じという点である。まず (a) については、地球の公転とは、地球ー太陽の系で考えたときの軌道角運なので、これは地球ー月系では入らない。さらに (b) は、一般には月の自転と公転は異なるはずであるが、現在 $T_m = 27.3$ 日 でそろっている (**同期**という)。このため月は地球に対して、常に同じ面を向け続け ている。これは一見、不思議であるが、潮汐力という天体の表面と中心との重力差の効果を考えると、自然と説明できる。潮汐力によるトルクが、(8) 式の各々の項の間の角運動量を輸送をする効果を生む。この場合も、内力が中心力なので、(8) 式の全角運動量は一定のままで変化する。月ができたばかりの頃は、月の公転と自転がもちろん異なっていたが、この潮汐トルクによって、徐々に第二項目の角運動量が第一項目に輸送されていく。最終的に同期化すると、この角運動量輸送は終了する (**潮汐ロック**という)。[3]

## 【エネルギー保存則】

これまで運動エネルギーに、さらに回転の運動エネルギーが加わり、

**並進運動**：$\frac{1}{2} m v^2$,　**回転運動**：$\frac{1}{2} I \omega^2$

の和を考える必要がある。ポテンシャルエネルギーとしてこれまで扱ってきた力とエネルギーをまとめておくと、

**重力**：$mg$,　**位置エネルギー**：$mgh$
**バネ (復元力)**：$-kx$,　**弾性エネルギー**：$\frac{1}{2}kx^2$
**万有引力**：$\frac{GMm}{r^2}$,　**重力エネルギー**：$-\frac{GMm}{r}$

となる。これらのポテンシャルエネルギーをまとめて $V$ と表すと、系の全エネルギーが保存する。

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Iw^2 + V = 一定 \tag{9}$$

これが**力学的エネルギー保存則**である。このような力を保存力といい、他にも電磁気力が出てくる場合は、クーロンポテンシャルなどがある。保存力以外が働く場合は、力学的エネルギーは保存しない。例えば、摩擦力、空気抵抗力などの場合、これらは非保存力なので、この量だけでは保存しない。もちろん発生する熱のエネルギーまで含めれば、系全体のエネルギーという意味では保存されている。この場合、通常扱う力学以外に熱力学までも含める必要がある。

## 演習問題

[4] 慣性モーメントが $I_1, I_2$ の 2 つの円盤が同じ軸周りに角速度 $\omega_1', \omega_2'$ で回転している。上下にあるこれを接近させて合体させることを考える。以下の問いに答えよ。

(a) 角運動量保存から、かみ合った直後の合体した円盤の角速度 $\omega'$ を求めよ。

(b) 前後のエネルギー変化を求めよ。

---

[2]もちろんこの力学の授業では、量子論や相対性理論といったいわゆる古典力学を超えた内容は扱わないが、角運動量はとくに量子力学において非常に重要な物理量となっている。軌道角運がどんな値でも取れる古典力学とは異なり、原子内の素粒子はこの $\boldsymbol{L}$ がある飛び飛びの不連続の値しか許されない。このため電子が原子内でとる軌道が決まっており、化学で出てきた K,L,M 殻のような概念が出てくる。さらに相対論的量子力学を扱うと電子は、古典にはないさらに内部の角運動量が存在することが分かる。この値は、軌道角運動量からの基準でみると ±1/2 になるので、上 (下) の**スピン角運動量**という。一見、電子も大きさがあり、惑星のような自転する物体と思ってしまうが、スピンは自転ではない。なぜならスピンが自然に出てくる相対論は、どんな剛体も成り立たない (回転して変形してしまうので)、つまり電子は少なくとも大きさのない質点のように扱われており、それでもなお内部に何か余分な角運動量 が残っており、これをスピンと呼んでいるだけである。我々の周りの物質の全ては、このスピン 1/2 の素粒子 (フェルミオンという) から成り立っている。

[3]太陽系の殆どの衛星はこのような惑星周りの公転と自身の自転が同期している。例えば、火星のフォボス, ダイモスや、木星のガリレオ衛星 (イオ, エウロパ, ガニメデ, カリスト)、土星のプロメテウス, ミマス, エンケラダス, レオ, タイタン.. ほぼ全ての衛星が潮汐ロックされて、常に惑星に同じ面を向けたまま公転している。準惑星である冥王星とその衛星カロンの系はかなり特殊で、ほぼ二重連星のような関係にあり、カロンの公転＝自転の同期はもちろん、冥王星の自転までも約 6 日で全てが同期完了している。また潮汐ロックは周期が一致するしないで、ロックされる場合もあり、水星の自転と太陽周りの公転は、同期する前に 58.6 日:88 日＝ 2：3 でロックされている。この様に周期が整数倍になるような現象は天体力学では、共鳴といって安定化や不安定化の境界としてよく現れる。

(c) (b) より、エネルギーの損失が起きていることがわかる。これはなぜか。衝突現象のところでやった反発係数：$e$ を参照して考えよ。

[5] 質量 $M$, 長さ $L$ の棒が滑らかな床と壁に、床との角度 $\theta$ でもたれている。水平方向を $x$ 軸、鉛直方向を $y$ 軸として棒の重心は $(x,y)=(L\cos\theta/2, L\sin\theta/2)$ となる。重力加速度を $g$ として、以下の問いに答えよ。(高校物理ではお馴染みの例題であったが、高校までは力とモーメントの釣り合いを用いて、この棒が倒れない条件などを求めていた。今回はその棒が動きだして回転する場合を解く。)

(a) $\theta=\theta_0$ で手を離して、棒の角度が $\theta$ になったときの、角速度 $\dot\theta$ を求めよ。角度は徐々に減っていくので、$\dot\theta<0$ であることに注意。エネルギー保存則 (並進、回転の運動エネ＋重力の位置エネ) を用いる。なお棒の慣性モーメントは $I=ML^2/12$ であった。

(b) 水平方向の運動方程式をたて、棒が壁から離れたときの、角度 $\theta$ を求めよ。$\theta_0$ を用いて表せ。

(c) (b) 以降、水平方向は垂直抗力がなくなり、等速直線運動になる。地面に棒が打ったとき $(\theta=0)$ の、角速度の大きさはいくらか。エネルギー保存則から考えよ。

==========================================================

## 【惑星の運動】

惑星の運動は、身近な落下運動と宇宙の天体の運動が同じ法則に従っているというニュートン力学のスケールの大きさを感じる格好の例である。万有引力とは字のごとく、全ての質量のある物質に作用する普遍性の表れであるともいえる。また様々な保存則の観点からも、よい例題となっているので、ここで簡単にまとめる。基本は全て、「**万有引力**」から導かれる。[4]

$$\boldsymbol{F}=-\frac{GMm}{r^2}\boldsymbol{e}_r$$

ここで極座標表示を用いておりマイナスは中心方向に引力であることを意味する。この力の法則から、とくに惑星系では重要となる**ケプラーの三法則**をまとめておく。

**【ケプラー第一法則】　「全ての惑星は、太陽を焦点の一つとする楕円軌道上を運動する。」**

ここを数式的に示すことが、ケプラーの三法則では一番ハードルが高い。ここでは簡単な流れをつかんでもらい、細かい数式の変更などは、後回しにする。まず惑星の運動を解析するには、太陽とある惑星の 2 物体の運動を考える。普通 2 物体の運動を扱う場合は、2 つの物体の重心を求め、この重心の運動と、換算質量：$\mu=m_1m_2/(m_1+m_2)$ を持った相対運動に分けられる。重心の運動は、全運動量が保存することに関係して、重心が等速直線運動をする。太陽系でいえば、太陽が全質量の 99% も占めるため。これは単に太陽の運動。したがって、太陽を固定して考えれば、相対運動のみを扱えば惑星の運動としては十分である。換算質量も太陽が圧倒的に重いので、$\mu\simeq m_2$ で惑星の質量と同じと考えてよい。運動方程式は、極座標で、(レポート問題でも極座標での加速度を扱ったので、詳しくはそちら参照。)

$$m\Big(\ddot r(t)-r\dot\theta^2(t)\Big)=-G\frac{Mm}{r^3} \tag{10}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\Big(r^2(t)\dot\theta(t)\Big)=0 \tag{11}$$

となる。ここで $m, M$ は惑星, 太陽の質量である。結果的に、惑星の質量 $m$ は無関係となる。一番目の式は $\boldsymbol{e}_r$ の成分、二番目の式は $\boldsymbol{e}_\theta$ の成分であるが、万有引力が $\boldsymbol{r}$ 方向のみの中心力であることから二番目の時間変化しない量：$h=r^2\dot\theta$ が現れる。これがケプラー第二法則と関係している。

$r=1/u$ となるような $u$ という関数を用いて、式を変形していくと、最終的に単振動と同じ形にまとまり、解が求まる。

---

[4] 万有引力の関数形を少し考えてみる。なぜ (a) 全ての質量に引力であるのか、(b) なぜ距離の逆 2 乗をしているのか。(c)2 物体の質量の積が出てくるのかと考えると様々な疑問が出てくる。歴史的にはケプラーの第三法則が観測事実としてあったので、そこから力が逆二乗則になることが導かれた。また作用反作用を考えると、(c) の形は自然であるといえるが、質量 $m$ の物体の運動方程式は $ma=F$ であり、この質量と $F$ に含まれる $m$ が等しくなる理由は、実は自明ではない。これらが等しいとして等価原理としてアインシュタインは、一般相対論としてニュートン力学を拡張した。これによって質量のない物質である光までも重力を「感じて」曲がったりする。電磁気のクーロン力と比較すると、さらに力の法則を考える材料になる。クーロン力は比例定数を $k$ として巨大な数に置き換わる。また電荷の正負によって (c) の形は同じだが、引力だけじゃなく斥力も作用する。(b) としてクーロン力も逆二乗則になっている。これらは、大本は空間が 3 次元であることに関係していると思われ、表面積 $4\pi r^2$ からきている。例えば、4 次元：$2\pi^2r^3$, 5 次元:$8\pi^2r^4/3$ となっているので、もし宇宙の空間が高次元だったなら、電磁気、重力それぞれ $1/r^3, 1/r^4$ となる。この場合、電子の軌道や、惑星の運動は安定な閉じた軌道が存在しないことが示されている。唯一安定な閉じた惑星軌道が存在するのは $1/r^2, kr$ の場合のみであるらしい (ベルトランの定理)。この様に原子構造ができることや、天体構造ができることと、逆 2 乗則という力の形とは大いに関係している。

$$r(\theta) = \frac{\ell}{1+\epsilon\cos\theta} \tag{12}$$

ここで注意することは、もともとは $r(t), \theta(t)$ であったのに対して、最終的な解は $r(\theta)$ という軌道の方程式になっている点である。[5]またこの極座標の原点は、いわゆるよくイメージしている座標の中心ではない。中心から $a\epsilon$ 離れた焦点の位置（ここでは太陽の位置）から $r, \theta$ が描かれている点にも注意する。$\epsilon$ は離心率と呼ばれ、中心から焦点がどれだけ離れているかを表している。$\epsilon$ の値によって軌道の形が異なっている。

$\epsilon = 0$: 円,　$0 < \epsilon < 1$: 楕円,　$\epsilon = 1$: 放物線,　$\epsilon > 1$: 双曲線

惑星は $\theta = 0$ の場所にいるとする。これは太陽から最も近い点に対応し、近日点という。$\ell$ は $\theta = \pi/2$、つまり焦点から垂直な位置に惑星が来た時の距離に対応している。式をプロットしてみれば分かるが、全ての $\epsilon$ の軌道にたいして、この点を通る。これも式を解かなければ分からないが、$\ell$ は、もとの物理量と、$\ell = h^2/(GM) = a|1-\epsilon^2| = b^2/a$ と関係づいている。

第一法則では円を含んだ楕円軌道 $(0 \le \epsilon < 1)$ だけに言及しているが、万有引力を使って解くと、自然と放物線や双曲線軌道といった他の軌道も導かれる。実際、太陽系の例では、それぞれの軌道に対応した天体が存在し、全ての惑星が楕円軌道、そして彗星は放物線や双曲線軌道をとることが知られている。現実的には、全 8 惑星のうち、円軌道からずれていると言えるのは、水星 $(\epsilon = 0.2)$ と火星 $(\epsilon = 0.1)$ くらいである。他の惑星、例えば地球 $(\epsilon = 0.016)$ は、ほぼ円軌道といってもよいレベルである。[6]

### 【第二法則】　「惑星の軌道運動の面積速度は常に一定である。」

ケプラー第二法則は、角運動量保存則と密接に関係している。角運動量ベクトルは $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ であったが、運動量を質量でわった速度で置き換える。これを「**速度モーメント**」$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$ といい、惑星の運動方程式 (11) 式から、$h = r^2\dot{\theta}$ が保存していることをみたが、これがまさに速度モーメント＝保存を意味する。第二法則を数式で書くと、

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\, r\, v = r^2\dot{\theta} = \text{一定} \tag{13}$$

式を見比べれば分かるが、ベクトルを用いて

$$\frac{d\boldsymbol{S}}{dt} = \frac{1}{2}\boldsymbol{h} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}) \tag{14}$$

と対応している。ベクトルの外積は $rv\sin\theta$ であり、$\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}$ で囲まれた平行四辺形の面積、つまりその半分で「惑星が単位時間にはく微小三角形の面積」になっている。つまり惑星の運動において、「速度モーメント $\boldsymbol{h}$(あるいは角運動量) が一定」であることと、「面積速度が一定」は同値である。また、$\boldsymbol{h}$ のベクトルが一定ということは幾何学的には、$\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}$ で作られた楕円軌道の平面に垂直なベクトルが一定方向を向いているということであり、その惑星が常に同一平面内で運動することに対応している。

角運動量保存則の他にも惑星の運動には、保存する量が存在する。2 次元の惑星の運動を扱うと、以下の 2 つの保存量がある。

$$\text{全エネルギー：} E = -\frac{GmM}{2a} + \frac{1}{2}I_s\,\omega_s^2 + \frac{1}{2}I_p\,\omega_p^2$$
$$\text{全角運動量:}\ J = m\sqrt{GMa(1-\epsilon^2)} + I_s\,\omega_s + I_p\,\omega_p$$

ここで $s, p$ の添え字は太陽と惑星を表している。$E$ の最初の項は、質点と見たときの惑星運動の全エネルギーで、運動エネルギーと重力ポテンシャルの和に対応している。残りは、それぞれの自転による回転エネルギーである。最初の項が負であるのは、軌道が閉じた束縛軌道であることを表している。また $J$ の第一項は、軌道角運動量で、残りは自転角運動量である。簡単のため、剛体の効果を除いて、質点系で考えると、$E, J$ それぞれの保存は、惑星の楕円軌道において、長半径 $a$, 離心率 $\epsilon$ が保存することに対応している。(一般の 3 次元空間の惑星の運動ではさらに軌道角運動量の z 成分も保存量となり、軌道傾斜角 $i$ に関係した $\sqrt{a(1-\epsilon^2)}\cos i$ が保存する。現在のぞれぞれの惑星の $i$ は全てほぼゼロに近

[5] $r(t)$ のように解くのは実は難しい。これはケプラー方程式と呼ばれる中心からの角度で移動時間を測る補助的な方程式の解を使う必要があるが、それでも解析的には表現できない。

[6] 彗星は、周期型と非周期型があり、ほとんどの周期型は $\epsilon < 1$ に対応する。周期が 200 年を境に短期、長期型に分かれ、起源もそれぞれカイパーベルト、オールトの雲に対応している。最も近い、地球軌道程度の彗星としてフェートン彗星は $\epsilon = 0.891$ で周期 1.4 年である。彗星は毎年起こる流星群と関係しており、これは有名な双子座流星群として観測される。またハレー彗星は　$\epsilon = 0.96$ で、地球との軌道の交点あたりで、水瓶座流星 (4 月), オリオン座流星 (10 月) となる。彗星の殆ど 8 割は長期側であり、これらは離心率が極めて 1 に近い、放物線軌道と円軌道の境目に対応している。 百武彗星は $\epsilon = 0.9999$ で周期は 10 万年もかかるもので、太陽から 1 万 AU も離れたところから来ている。観測されている彗星のうち、離心率が最大のものでもボウエル彗星 $\epsilon = 1.06$ であり、双曲線軌道は、一度観測されて二度と戻ってこないので、観測例も少ない。

い値となっており、全惑星の軌道平面は、ほぼ同一平面内 (黄道面) に収まっているといえる。これと赤道傾斜角は異なる概念で、いわゆる地球の地軸が 23.4 度傾いているというのは、後者の角度である。)

**【第三法則】　「惑星の公転周期 $T$ は、楕円軌道の長軸半径 $a$ の 3/2 乗に比例する」** これの法則は、惑星の運動を半径 $a$ と公転周期 $T$ だけで議論するとき、非常に便利である。式でかくと、円運動として (10) 式を $\ddot{r}=0$ として、$r=a$ で置き換えればよく、高校物理でも出てくる簡単な公式となる。

$$a\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2=\frac{GM}{a^2} \implies T=2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}}, \quad \omega=\sqrt{\frac{GM}{a^3}} \tag{15}$$

これより、**『$T\propto a^{3/2}$』**となっている。この第三法則は、ニュートンが万有引力として力が $r$ の逆 2 乗に比例していることを導いた際に、最も重要となった観測事実である。またこの関係式を用いて、惑星同士の軌道半径を相対的に測ることが可能となる。周期は、もちろん直接観測できるので、その比から太陽からの各惑星までの距離の相対比が出る。あとはどこか特定の惑星までの距離をレーザー光を反射させて、光速度から確定させて絶対量として決めることができる。逆に太陽の質量は、このケプラー則に基づいて求められる。さらに各天体までの距離が求まると、視直径から、その天体の直径が見積れるようになる。この様に、天体力学ではこの第三法則が、多岐に渡り重要な役割をしており、第三法則のみを単に「**ケプラーの法則**」と呼ぶときもある。

==================================================================

## 演習問題

**ケプラーの法則**を考える。問 [6]-[8] まで、必要ならば以下の数値を使え。

$G=6\times10^{-11}$, 地球の質量：$M_e=6\times 10\ 24kg$, 地球半径：$R_e=6400km$, 月の質量：$M_m=7\times10^{22}kg$, 月の半径：$R_m=1700km$, 月までの距離：$d=40$ 万 $km$　計算するときは、単位をそろえること。とくに $G$ のこの値を使うときは全ての数値は $m,kg,s$ に直して代入。また平方根は、$\sqrt{2}=1.4, \sqrt{3}=1.7, \sqrt{5}=2.2, \sqrt{7}=2.6, \sqrt{10}=3.2, \sqrt{17}=4.1$ を使え。

[6] **第一法則**を考える。まず楕円の式を、$x,y$ 座標で表記する。

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{16}$$

$a$ を長軸半径、$b$ を短軸半径といって離心率と $b=\sqrt{1-e^2}a$ の関係がある。以下の問いに答えよ。

(a) 軌道の式である (12) 式を変形して、よく知られた楕円の式 (16) となることをみる。極座標と直交座標の関係は、$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ となっている。(12) 式を変形して以下の式になることを確認せよ。

$$(1-\epsilon^2)x^2+2\ell\epsilon x+y^2=\ell^2 \tag{17}$$

この式の形から $\epsilon^2<1$ のとき、(16) 式の楕円の式と本質的に同じであることが分かる。

(b) $r(\theta)$ の軌道の式 (12) を具体的に以下の場合に、プロットせよ。原点は焦点 (太陽) である。そこから真横に $\theta=0$ の線がくる。(i) $\epsilon=0$, (ii) $\epsilon=0.5$, (iii) $\epsilon=1$, (iv) $\epsilon=2$ $\theta=\pi/2$ でどの曲線も $r=\ell$ の同一点を通る。それぞれ円、楕円、放物、双曲線になるようにラフに軌道を描け。放物以上では、$\theta\to\pi$ で、$r\to\infty$ となるので、原点から無限遠に遠ざかっていく軌道となっている。

(c) 楕円の定義は、「二焦点からの距離が $2a$ となる曲線」である。これは一つの焦点からの距離でいうと、最も焦点に近い惑星位置 (近日点) と最も遠い点 (遠日点) までのそれぞれの距離の和が $2a$ となることである。つまり近日 ($\theta=0$), 遠日 ($\theta=\pi$) の時の、二つの $r$ の和が $2a$ になるとして、$\ell=a(1-\epsilon^2)$ を示せ。また近日点, 遠日点の $r$ をそれぞれも $a$ を用いて表せ。

(d) (17) 式で $\epsilon=1$ の場合、放物線の式になっていることを確認せよ。$x,y$ 座標を入れ替えて考えれば、高校で習ったいわゆる二次曲線を横に倒している曲線であることが分かる。これと (b) で図示した $\epsilon=1$ の線を比較せよ。

(e) アポロ計画を考える。人類が初めて月面にたったアポロ 11 号の成功の 1 年前、アポロ 8 号が初めて月の周回軌道に入り、無事有人飛行し地球へと帰還した。今度は太陽の代わりに、焦点位置に地球の中心を持ってきて、地球の重力でだけを使って、月までいくことを考える。近日点を地球半径、遠日点を月までの距離として、楕円軌道にのっていく場合、離心率 $\epsilon$ はいくらになるか？また長軸半径 $a$ も求めよ。ケプラーの法則 (15) 式を用いて、月までの楕円軌道の周期を求めよ。ここで $M$ は太陽ではなく、地球の質量である。

[7] **第二法則**　月と地球の角運動量保存則 (8) 式について考える。以下の問いに答えよ。

(a) 月の自転＝公転周期＝ 27.3 日となっていることから (8) 式の第一項と第二項を比較して、月の自転角運動量 $I_m\omega_m$ が無視できることを示せ。ただし、慣性モーメントは球として、$I=2MR^2/5$ を用いよ。

(b) (8) 式の第一項と第三項の割合を計算する。月の公転の軌道角運:$M_m d^2$ が全角運動量に占める割合を % で求めよ。

(c) ケプラーの第三法則 (15) 式を用いて、角速度 $\omega_m$ を置き換えた式を書き下し、前ページの**【第二法則】**のカッコでまとめた全角運動量の形と比較せよ。ただし $d = a$ と考えてよい。

月は形成してから徐々に地球から遠ざかっており、100 年間で約 $\Delta a = 3.8m$ づつ遠ざかっている。全角運動量が保存するので、この変化分で、逆に地球の自転周期、つまり一日の長さが、毎年少しづつ遅くなっている。100 年でどれほど一日の長さが変化するか $\Delta T$ を求めることを考える。変化分が微小だとして、

$$M_m \sqrt{GMa} \left( \frac{\Delta a}{2a} \right) = I_e \frac{2\pi}{T} \left( \frac{\Delta T}{T} \right)$$

と近似できる。ここで簡単のため、$\Delta a/a = 10^{-8}$ とせよ。「うるう秒」と呼ばれる一日の遅れ を求めよ。

(d) (b),(c) より、現在、地球ー月系の全角運動量は、月の公転軌道が殆どの角運動量を担っており、潮汐トルクによって徐々に、地球自転側に角運動量が輸送していっている。この移動は最終的に、$\omega_m = \omega_e$ という同期化するまで続く。この時の周期、つまり一日=一月となったときの長さが何時間になるかを求めてみる。最終的に (b) の月公転側に角運動量が 99.6% に輸送した段階で終了する。地球自転側の $\omega_e$ の変化が比例関係なので、現在の角運動量の値から 0.4% になる時の $\omega_e$ を求めよ。そこから一日が何時間になるか求めよ。

(e) (d) の 同期化が完了するまでにかかる時間 を考える。まず月の周期変化（現在の一日で測ると便利）から、ケプラー第三法則の比例関係を用いて、月までの距離がどれくらい遠くになるかを求めよ。現在との差を求めて、$\Delta a = 3.8m/100$ 年 の単純な比例関係の変化から、何億年後になるかを求めよ。ただし数値として簡単のため $(50/27.3)^{2/3} = 1.5$ とせよ。

[8] **第三法則**　地球ー太陽の距離は天文単位といって $1AU = 1.5$ 億 $km$ である。以下の問いに答えよ。

(a) ケプラーの法則 (15) 式を用いて、太陽の質量を求めよ。

(b) 他の惑星の周期を求める。ケプラーの法則は比例関係なので、基準となる単位をうまく選ぶと太陽質量などを毎回用いる必要がないので、便利である。地球ー太陽の距離 (AU)、時間を年でそろえると、

$$T = r\sqrt{r(AU)}\,[\text{年}]$$

となる。　惑星のデータは、以下のようになっているので、距離を用いて、周期を求めよ。また実際の値と比較せよ。[7]

| 惑星 | 水星 | 金星 | 火星 | ケレス | 木星 | 土星 | 天王星 | 海王星 | 冥王星 | エリス |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 距離 $r(AU)$ | 0.4 | 0.7 | 1.5 | 2.8 | 5 | 10 | 20 | 30 | 40 | 68 |
| 周期 $T$(年) | 0.24 | 0.6 | 1.88 | 4.6 | 11.8 | 29.5 | 84 | 165 | 250 | 560 |

(c) ケプラーの法則をみたら分かるが、惑星自体の質量は出てこない。惑星の質量を決めるには、ケプラー則をどのように使ったらよいか。

(d) アポロ 8 号が月の周回軌道に入った状態を考える。ケプラーの法則を用いて、月を一周するのに何時間かかるかを計算せよ。月の重力で周回するので、$M$ は月の質量、$a$ は月の半径と考えよ。$\sqrt{117} = 11$ も用いよ。

[7]【太陽系の進化】保存量がある一方、長期的な惑星進化では、太陽以外の木星など 3 番目の天体の影響 (逆 2 乗則の摂動で $r$ の 3 乗の力) や、潮汐力による摩擦、さらには惑星、小惑星との衝突などによって、数万年-数 100 万年の単位で $a$ や $e$ も変化しうる。つまりエネルギー保存則が破れる現象が多いので、保存則としては、角運動量保存の方が重要となる。太陽系でいえば、全質量が太陽にあるといってもよいので、太陽の自転角運動量が圧倒的な割合を占めている。もともと太陽とその周りの惑星は、水素やヘリウムが主体の原始分子雲が重力的に固まって収縮をしてできたものであると考えられている。そこで角運動量保存則があるために、未だにその頃の角運動量を太陽自転が担っているともいえる。分子雲の最初の大きさは、およそ 1 万 AU(約 0.1 光年) にも達するほど巨大であり、これは現在の太陽系の端だと思われているオールトの雲までの距離に近い。この巨大なガスの塊が、太陽の前段階である「T タウリ型星」と周りの薄い円盤の系になるまでに、約 4 ケタも距離を縮める必要 がある。角運動量が保存しているので、勝手に縮めようとすれば回転速度が急激に高くなるので固まれず、いかに角運動量を外へ捨てていくか が、太陽系進化では重要となる。ダストと呼ばれる数 $\mu m$ も小さいチリの塊から微惑星のような数 $km$ の構造を作り、それらを外の軌道に運ぶことで太陽自身が持つ角運動量を減らしている。この角運動量輸送で、タウリ型星になるまでに、1000 万年程度で 100AU まで縮める凄まじい変化をとげる。角運動量保存はよくフィギュアスケートの回転に例えられるが、それでいえば、腕を縮めて回転速度を上げるのとは、逆センスで、太陽系は、原始分子雲からタウリ型星までの進化で、腕をより遠くに伸ばして自分の体の一部を、まるでアンパンマンのようにちぎって、外へ外へと運んで、回転を遅くして進化してきたといえる。その後、中心の原始太陽が水素燃焼できるだけの十分な質量に固まると、標準的な恒星として約 100 億年程度の寿命を持つ星となる。その周りの円盤部分では、微惑星の衝突から小惑星、さらには惑星系が形成される。形成後もずっと軌道が安定状態のまま今に至ったというわけではなく、太陽系でいえば木星の位置、動きが鍵となった。木星がかなりゆっくりではあるが、軌道を変えて移動してきて、過去には現在の小惑星帯や火星手前あたりまで移動してきたと考えられている。その後、後方で形成された土星によって後ろに再びひっぱられ、現在の軌道位置まで遠ざかった。この移動で、例えば火星が十分な質量の岩石惑星として成長できなかったことや。海王星と天王星の軌道が逆転して変化してきたことなどが説明されている。このように保存則がでてくると、それで 安定に変化なく現在まで続いているような印象を受けるが、数十億年という長期進化の中では、躍動的な変化がたえず起こっているということを付け加えておきたい