要旨

形成途中にある多くの天体は、中心の星とそれを取り巻くガス円盤を持つことが観測により知られている。本論文では、円盤をもつ星の形成を記述する理論を、半解析的な方法で構築する。

円盤をもつ星の形成過程は、大きく 2 つの段階に分けられる。前半は、Runaway Collapse 期と呼ばれる、自己重力によるガス収縮の段階である。回転や磁場があると、自己重力によって収縮するガスは偏平な円盤になる。収縮が進むに連れて、中心面密度は上昇し、面密度がほぼ一定の中心領域は縮む。中心から離れたところでは、面密度は半径に逆比例する。 Runaway Collapse 期の最後には、中心部でも、面密度が半径に逆比例し落下速度が一定になる。

後半は、 Inside-out Collapse 期と呼ばれる、中心星とガス円盤への質量降着の段階である。 Inside-out Collapse 期では、時間に比例して質量が増加する星が中心に形成される。円盤のガスは、内側から順に中心星に自由落下してゆく。Inside-out という名前は、ガス円盤からの降着の様子から付けられた。

Runaway Collapse 期でも、 Inside-out Collapse 期でも円盤の面密度分布などは、その関数形を変えずスケールのみが時間進化する。この性質を利用すると、円盤の進化を相似解で表すことができる。私は、 Runaway Collapse 期と Inside-out Collapse 期のそれぞれに対して相似解を数値的に求めた。相似解を求める際には、 (1) ガス円盤は等温に保たれている、 (2) ガス円盤は幾何学的に薄い、という仮定をおいた。

今回得られた相似解から導かれるおもな結果は、以下のとおりである。

(i) 相似解には、回転速度の異なる無数の解が存在する。回転の強さは無次元のパラメータ ω で表現できる。 Runaway Collapse 期について、いろいろな回転についての円盤の解を数値的に厳密に得た。

(ii) Runaway Collapse 期の解について、確認のために数値シミュレーションと比べた。磁場に貫かれたガスの場合、実効的に音速と重力定数を変換することで表せて、最大 30% の誤差でそれと一致した。回転しながら重力収縮するガスの場合、落下速度の誤差は 10%、面密度分布は 70% であった。誤差はおもに、 Thin Disk 近似が重力を強く見積る傾向があるためである。

(iii) Inside-out Collapse 期の近似解から、中心星の質量降着率を計算した。質量降着率は、 ω が大きい (回転が速い) ほど、小さい。

目次

1　序論

銀河系は、主に星および星間ガスにより構成されている。星間ガスから、星が形成される過程を理解することは、現代の天文学の主要な目標となっている。星形成は、分子雲コアと呼ばれる星間ガスの濃い領域でガスの自己重力収縮により起こる。星形成において中心星が形成される段階では、中心星やその周辺円盤は、ガスや塵に深く覆われている。そのため、この段階の進化は、ガスや塵による減光により可視光では観測できず電波、サブミリ波、赤外線およびX線で観測が行なわれている。しかし、いずれの観測でも減光や分解能の問題がある。そのため、この段階でのガスの重力収縮や中心星の周辺円盤の直接の観測はない。特に中心星およびその周辺円盤の形成に関係していると思われている多くの現象が疑問として残されている。その代表的なものが、双極分子流と呼ばれる質量放出現象と連星系の形成である。中心星の形成の前後での円盤の構造と進化の理論的な研究は、このような研究に基礎を与えるのもである。

中心星の形成の前後での理論的な研究は、おもに数値シミュレーションと相似的な進化を仮定した解析的な方法の2つがある。後者の解析的方法は、球対称の場合についてよく研究されている。この相似進化を仮定すると、解析的に問題が扱える。問題が解析的に扱えるので、構造と進化の理解がしやすい。球対称の場合は、この相似進化の解は、厳密に得られている。この球対称での解から中心星への質量降着率などの重要な物理量が導ける。

しかし、実際の星形成は、双極分子流と呼ばれる非球対称な質量放出があるなど球対称ではないことが知られている。また、数値シミュレーションによると、磁場に貫かれているガス雲や回転しているガス雲は、薄いガス円盤を形成することが知られている。このガス円盤は、軸方向にほぼ平衡となり、半径方向に動的に収縮するものである。よって、球対称よりも回転する軸対称なガス円盤で問題をとり扱う方がより一般的であると思われる。しかし、その解の満たすべき方程式系は、非線型な積分微分方程式となり、厳密には解かれていなかった。

まず、中心星の形成前については、これまでの研究では、ガス円盤の相似進化の解は、近似的が得られているのみである。本研究では、このような円盤の相似解を初めて（数値誤差の範囲で）厳密に得た。

さらに、中心に星が形成されたあとの進化についても研究した。これまでの研究では、回転するガス円盤のモデルに対しての中心星形成後の進化は、シミュレーションにおいても、解析的にも研究されていない。本研究では、このときの相似進化の解を近似的に得ることができた。これにより、今まで議論できなかった中心星の周りの回転によって支えらている円盤への質量降着を議論できる。まず、中心星の周りに回転

によって支えらている円盤が形成される。そして、この中心円盤に外側のガスが超音速で自由落下してくる。そして、このガスは、衝撃波面を通って亜音速に減速して降着する。このときの質量降着率は、球対称の場合の質量降着率に対してほぼ 20% である。また、回転円盤の半径は、音速に比例する速度で外へ向かって大きくなることがわかった。

以下に、この論文の流れをまとめる。２章では、星形成の観測をレビューした。
３章で、球対称モデルで今までになされた理論的研究をまとめた。
４章では、軸対称のモデルで今までになされた理論的な研究をまとめた。
５章には、本論文での研究方法とその結果を示した。これにより、相似的進化する軸対称なガス円盤について中心星の形成前後の解を半解析的に得た。
６章では、本研究の結果と数値シミュレーションとの比較を行った。また、Inside-Out Collapse 期でのガス円盤の構造と進化を考察した。

2　星形成の観測のレビュー

2.1　星形成への大きいスケールからのアプローチ

2.1.1　分子雲コアでの星形成

銀河系の円盤内には、分子雲と呼ばれる星間ガスの濃い領域が存在する。その密度は典型的には、 ~ 20個cm^{-3} であり銀河系円盤の典型的密度 ~ 1個cm^{-3} に比べてかなり濃い。

このような分子雲には、若い星が多く付随していることから分子雲内で現在活発に星形成が行われていると考えられている (Myers 1986)。分子雲の温度は ~ 10K でほぼ等温である。その大きさは 10 ~数 10pc(1pc$\simeq 3 \times 10^{18}$cm)、質量は 10^4 ~ $10^6\mathrm{M}_\odot$($1\mathrm{M}_\odot$ は太陽の質量 $\simeq 2 \times 10^{33}$g) である (Lada et al. 1993)。

分子雲は質量が $10^4\mathrm{M}_\odot$ を超えるものを、巨大分子雲と呼び、超えないものを暗黒星雲と呼び区別している。オリオン星雲は、巨大分子雲の代表的なもので、牡牛座分子雲は、暗黒星雲の代表とされる。巨大分子雲と暗黒星雲では、星形成の様子が異なる。巨大分子雲が集団的な星形成領域であるのに対し暗黒星雲は、おもに孤立的な星形成が起こる (Shu et al. 1993)。星形成の観測において牡牛座の暗黒星雲での太陽またはそれ以下程度の質量（Churchwell et al. 1978）の小質量星の形成についての観測が、もっとも活発に行われている。これは、牡牛座の暗黒星雲は、我々から近い (140 pc) 星形成領域だからである。

分子雲の観測には、主に分子線と呼ばれる分子の回転エネルギー準位間の遷移による放射が用いられる。この分子線は、電波で輝線として観測される。分子の種類によって観測できる密度が異なってくる。

分子雲には分子雲コアと呼ばれるコンパクトな高密度領域がある。この典型的長さは、 0.1 ~ 0.4pc、典型的密度は 10^4個cm^{-3} である (Myers et al. 1983, Lada 1993)。観測には、 $\mathrm{NH_3}$ や $^{13}\mathrm{CO}$ などの分子線が用いられる。コアの中で 10^5個cm^{-3} を越えるような高密度コアの観測には $\mathrm{HC_{13}O^+}$ が用いられる。この $\mathrm{HC_{13}O^+}$ の観測によると高密度コアの約 1/3 には、 IRAS 点源と呼ばれる赤外線点源が付随していた (Onishi 1996)。この赤外線源は、中心星へのガスの質量降着によって解放された重力エネルギーであると考えられる。図 2.1 に等密度線と付随している赤外線点源を表した。

赤外線点源が付随した高密度な分子雲コアでは、動的な星形成がすでに進行していると思われる。これには、直接の観測的な証拠はない。間接的な証拠としては、赤外線点源が付随した高密度な分子雲コアからの双極分子流の観測がある (Shell et al. 1980, Hirano 1992)。双極分子流とは、双極方向にガスが放出されるという動的質量放出のことである。赤外線点源が付随した高密度な分子雲コアでは、約 75% に双極分

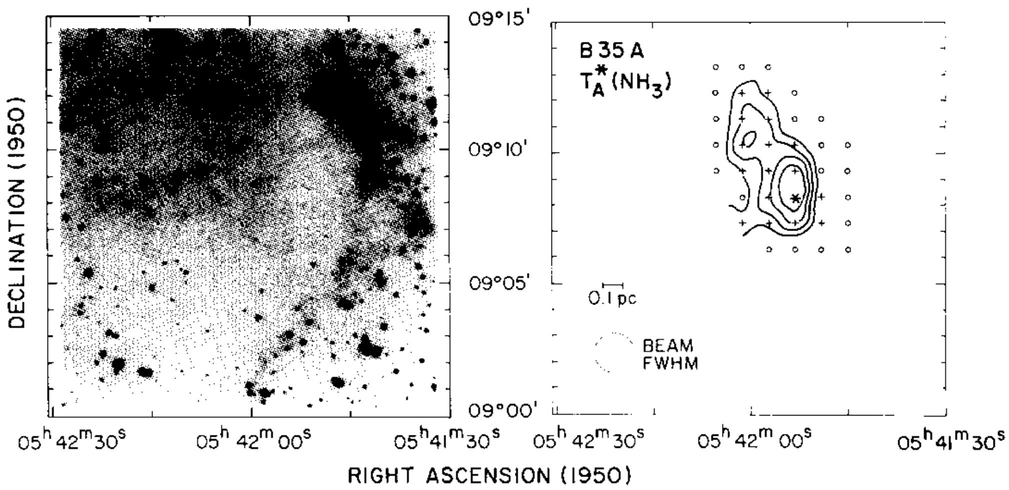


図 2.1: 赤外線点源の付随した高密度のコア。Ｂ３５（バーナードのカタログの３５番目）という高密度なガス天体を観測したもの。左図は、パロマ図（可視光）である。分子雲による減光により中央の右側で見える星の数が減少している。右図は、 NH_3 でのピーク強度。等強度線は、それぞれ 0.15、 0.20、 0.25、 0.30K を表す。 (Lada et al. 1993 より)

子流が見られた (Hirano 1995)。

　また、赤外線点源が付随した高密度な分子雲コアの視線方向の速度の観測は、動的な収縮の存在を示唆している (Leung et al. 1977, Zhou 1993)。これについては、次節で説明する。

2.1.2　高密度分子雲コアの段階での動的進化

　赤外線点源が付随した高密度分子雲コアの段階での動的な収縮は、以下のようにして間接的に示されている。図 2.2 に高密度な分子雲コアであり IRAS 点源が付随した B335 と呼ばれる天体を観測した結果を示す。この図を見ると、強度のピークが 2 つ存在する。横軸の速度は、我々から遠ざかる方が正としてある。よって、左側のピークは、天体の平均より波長が短い側つまり、天体に対して青方偏移した側にある。右側のピークは、天体に対して赤方偏移した側にある。この 2 つのピークの内、左側の青方偏移した方が強めに観測されている。これは、高密度な分子雲コアの中心付近で、ガスが重力収縮しているとするモデルで説明できる (Leung et al. 1977)。

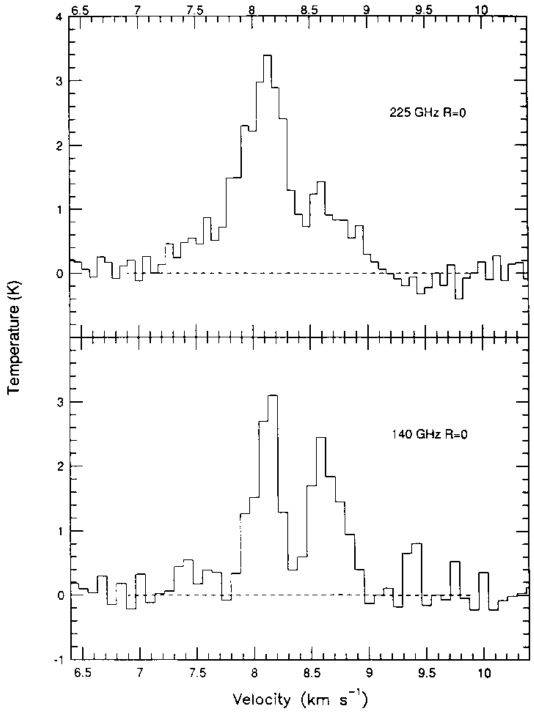


図 2.2: Ｂ３３５という天体についての視線速度（ドップラー）の観測結果。横軸が視線速度で遠ざかる方が正、縦軸がその速度に対応する輝線の強度（アンテナ温度）。上が N_2CO の $225GH_z$、下が $140GH_z$ にある輝線を観測したもの。(Zhou et al. 1993 より)

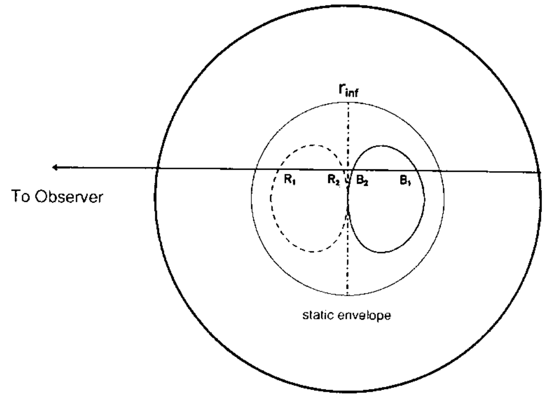


図 2.3: 高密度分子雲コアのモデル。外側の同心円が分子雲を、内側の同心円（半径:r_{inf}）が動的な収縮する領域の範囲を示している。この動的な収縮する領域には、それぞれ視線方向の速度が等しくなる等速度線が表してある。(Zhou et al. 1993 より)

図 2.3 に表した図は r_{in} の内側で中心に向かってガスが落下しているモデルを表している。内側の方が密度が高いとする。観測者が左側から見ると、一点破線より左側では輝線はドップラー効果によって赤方偏移し、右側では青方偏移する。それぞれの領域にある同じ速度だけ赤方偏移または青方偏移する場所をそれぞれ破線、実線であらわしてある。

このときの視線速度分布を調べる。ある速度だけ青方偏移したものは B_2, B_1 からの放射の和である。このとき、内側の B_2 の方がより強く放射している。一方、ある速度

だけ赤方偏移したものは R_2, R_1 からの放射の和である。このとき、内側の R_2 の方がより強く放射している。このままでは赤方偏移も青方偏移も対称である。しかし、温度が中心の方が高いと仮定して吸収を考えると話は違ってくる。赤方偏移の方は、観測者から見て、高い温度でより明るく放射している放射源が暗い放射源に隠されている。青方偏移の方は、高い温度でより明るく放射している放射源が手前となり直接観測される。

つまり青方偏移の方が強めに観測されることは、ある半径より内側での重力収縮を示唆している。重力収縮を示すと思われる図 2.2 のような観測は、その他の高密度分子雲コアでも観測されている (Myers et al.1995)。

2.2 星形成への小さいスケールからのアプローチ

前節までの話は、星形成を進化のシナリオ（図 2.4）に沿って大きなスケールから小さなスケールへとたどるものであった。時間に沿って進化を追う方法では、ガスの重力収縮による中心星と周辺の円盤の形成の付近で行き詰まる。これは、この段階の進化の天体は、直接的に観測できていないことによる。この節では、星形成のシナリオを可視光で観測できる段階から逆にさかのぼるようなものをまとめる。

星形成が進み中心で核融合が連鎖的に起こるまでの間、星はガスの降着による重力エネルギーの解放で光る。星形成の初期の段階では中心星の周りをガスや塵が覆い吸収と再放射がおこる。このため、星形成の初期の方がより赤く（長波長）見える。小質量（$< 2\mathrm{M}_\odot$）の星で、可視光で見えるまで進化した形成途中の星を T- タウリ型星と呼ぶ。

理論的な計算によって T- タウリ型星が主系列星（核融合が定常的に起っこている星）となるまでの時間が計算されている（Iben 1965, D'Antona et al. 1994）。こうすると T- タウリ型星の数との比からその他の進化段階の時間的なスケールを見積もることができる（Kenyon et al. 1995, Onishi et al. 1996）。図 2.4 に、タイムスケールの見積もりを表す（Onishi et al. 1996）。 T- タウリ型星は、そのスペクトルの形から中心星の周りに円盤を持つことが示唆される (Lada 1987a)。最近、ハッブル宇宙望遠鏡（HST）は、オリオン座で星雲を背景にして T- タウリ型星の中期の進化段階の星の周りの円盤の陰を直接観測した（McCaughrean et al. 1996）。これにより、中期の進化段階の T- タウリ型星には、周辺円盤があることが確実となった。

初期の進化段階にある T- タウリ型星の周辺には、ガスや塵が存在する。この段階での円盤の観測には、主に電波、ミリ波が用いられる。電波の観測では、扁平な高密度ガスの分布が観測されている。しかし、中心星への質量降着に関わるような周辺円盤（ほぼケプラー回転 + 半径方向への収縮）はもっと小さいスケールである。例えば、

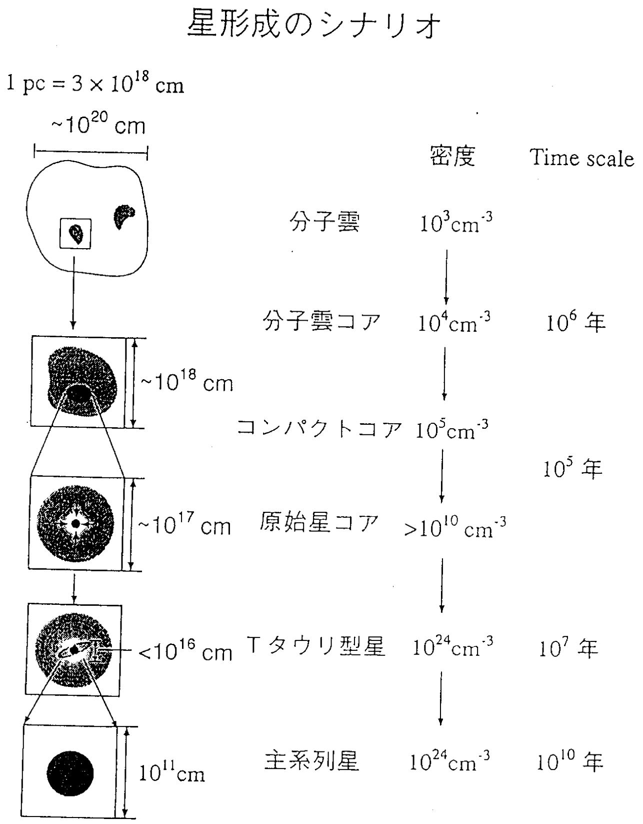


図 2.4: 小質量星の形成のシナリオと典型的タイムスケール。タイムスケールは、星形成が定常的に続いていると仮定して、天体の数の比より求めたもの。(Onishi et al. 1996 より)

この段階の天体でもっともよく観測されている HL Tau と呼ばれている天体では、この円盤の半径は $\sim 3.5 \times 10^{-3}$pc と思われている (Lin et al. 1994)。^{13}CO などの電波やミリ波の観測での分解能は、この半径より少し小さい程度である。よってその構造の理解は、少ない観測データとモデルとの比較により行われている (Sargent et al. 1987, Becwith et al. 1993)。このように、初期の進化段階にある T- タウリ型星の中心星周辺の円盤の構造の観測は、不確実である。

3　星形成の理論: 球対称の場合

星形成の研究分野において、６０年代から球対称状ガス雲の自己重力による収縮の数値計算が行われるようになり、その非一様な密度構造などが明らかになってきた。

Hayashi (1966) は、自由落下のタイムスケールとエネルギー放射のタイムスケールの比較を行った。これにより、分子個数密度が１平方センチメートル当たり 10^{10} 個となるまでは、ほぼ等温として扱えることが示された。これは、星形成が行われている分子雲コアの典型的な密度である１平方センチメートル当たり 10^4 個と比べ、６桁もの差がある。つまり、星形成におけるガスの自己重力による収縮は、近似的に等温過程と見なせる。この章では、星形成を、等温、球対称な星間ガスの重力収縮として取り扱った今までの理論的な研究をまとめる。この球対称での研究は、本修士論文のガス円盤の研究の手本となるものである。

星の形成過程は、中心星の形成の時刻を境に大きく２つの段階に分けられる。前半は、 Runaway Collapse 期と呼ばれ、自己重力によるガス収縮の段階である。後半は、 Inside-out Collapse 期と呼ばれる、中心星への質量降着の段階である。
３・１節では Runaway Collapse 期の球対称での理論を、
３・２節では Inside-out Collapse 期の球対称での理論についてまとめる。
３・３節では数値シミュレーションの結果と相似解の比較の研究をまとめる。

3.1　Runaway Collapse 期の重力収縮

3.1.1　球対称重力収縮の性質

一次元球対称の等温ガスの自己重力収縮は、多くの研究がなされてきた。Bodenheimer & Sweigart(1968) は、その進化の初期において圧力勾配が大きな役割を果たすことを数値的に示した。 Bodenheimer & Sweigart(1968)、 Larson(1969) などは、一次元球対称の等温ガスの自己重力収縮の構造と進化を調べるための１次元球対称の数値シミュレーションを行った。これらの研究により初期条件や外側の境界条件にはよらず密度が r^{-2} に比例する分布に漸近することがわかった。

図 3.1 に、 Larson (1969) が行った数値シミュレーションを示す。図ように、密度分布 $\rho(r)$ は r^{-2} に比例する分布に漸近していく。さらに、詳しく見ると、密度分布の進化は図のような対数空間で、平行移動となっている。これは言い換えると、密度分布は関数形を保ったままスケールのみが時間進化することを示している。このようなスケールのみが進化するような進化のことを、相似的進化と呼ぶ。

Larson(1969), Penston(1969) は、この相似的進化の性質を利用して解析的に、１次元球対称の等温ガスの自己重力収縮について、その進化と構造を表す解を導いた。こ

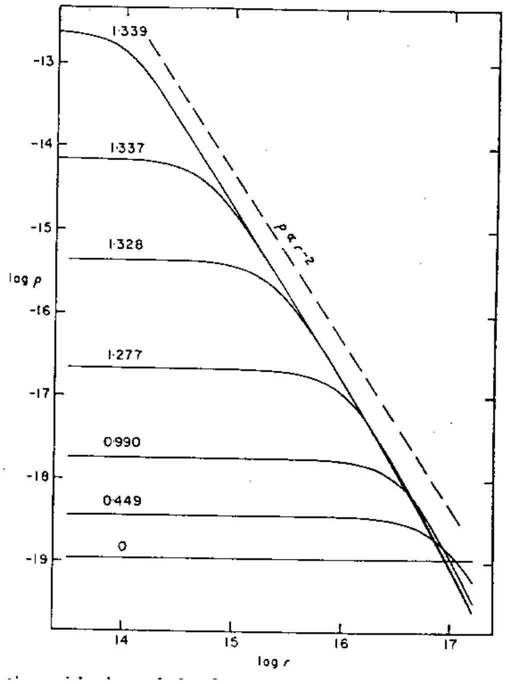


図 3.1: 半径に対する密度分布の進化の一次元数値シミュレーション。初期条件を密度一様としてある。縦軸は、密度 ρ、横軸は、半径 r でそれぞれ対数をとってある。c.g.s 単位系であり図中の数字は、時間を表し 10^{13}s を単位としてある。(Larson 1969 より)

の節では、 Larson(1969) の行った解析を説明する。

3.1.2 相似的進化を仮定した解析

一次元球対称の等温ガスの満たすべき基礎方程式は、連続の式と運動方程式でありオイラー形式で記述すると、

$$\frac{\partial M}{\partial r} = 4\pi r^2 \rho \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -4\pi r^2 \rho v_r \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} - \frac{GM}{r^2}, \tag{3.3}$$

となる。ここで、 M は半径 r の内側の質量（内部質量）、 v_r は半径方向のガスの速度、 P は圧力である。等温の仮定より、音速を定数 c_s として圧力は、

$$P = c_s^2 \rho \tag{3.4}$$

と書ける。

Larson(1969) は、時間進化するスケールと、時間進化するスケールから見て不変である関数形、を分けて考えた。半径の距離スケールの時間変化に乗った変数を s とすると、時間のみに依存する関数 $a(t)$ を使って

$$r \equiv a(t)s, \tag{3.5}$$

と表せる。この時間的にスケールが変化する空間上での物理変数の進化を考える。まず、時間依存性を表す関数 $b(t), c(t), d(t)$ と時間に依存しない関数を変数分離する。

$$\rho(r,t) \equiv b(t)\rho_1(s), \tag{3.6}$$

$$v_r(r,t) \equiv c(t)v_{r1}(s), \tag{3.7}$$

$$M(r,t) \equiv d(t)m_1(s), \tag{3.8}$$

ここで、添え字 1 を付けた変数は、スケールの時間進化に乗った（時間依存しない）物理変数を表す。これを基礎方程式系 (3.1) ~ (3.3) に代入すると

$$\frac{d}{a}\frac{dm_1}{ds} = a^2 b(4\pi s^2 \rho_1), \tag{3.9}$$

$$-\frac{d}{a\dot{a}}s\frac{dm_1}{ds} = -a^2 bc(4\pi s^2 \rho_1 v_{r1}), \tag{3.10}$$

$$-\frac{c\dot{a}}{a}s\frac{dv_{r1}}{ds} + \dot{c}v_{r1} + \frac{c^2}{a}v_{r1}\frac{dv_{r1}}{ds} = -\frac{1}{a}\frac{c_s^2}{\rho_1}\frac{d\rho_1}{ds} - \frac{d}{a^2}\frac{Gm_1}{s^2}, \tag{3.11}$$

となる。ここで、ドットは、時間微分 $\dot{a} \equiv \frac{da}{dt}$ を表す。これが、変数分離できるためには、時間依存性 $a(t), b(t), c(t), d(t)$ には、

$$a \propto t,\ b = a^{-2},\ c = 1,\ d = a \tag{3.12}$$

の関係がなければならない。このように、スケールの時間依存性は一意に決まる。

このような、座標系を、相似座標系と呼び、それぞれの変数を相似変数と呼ぶ。結局、重力定数 G と音速 c_s を使って無次元化すると、 t_0 を定数として

$$x = \frac{r}{c_s(t_0 - t)} \tag{3.13}$$

$$\rho(r,t) = \frac{1}{4\pi G(t_0 - t)^2}\eta(x) \tag{3.14}$$

$$v_r(r,t) = -c_s\xi(x) \tag{3.15}$$

$$M(r,t) = \frac{c_s^3(t_0 - t)}{G}m(x), \tag{3.16}$$

となる。ここで、 x は半径、 η、 ξ 及び m はそれぞれ、密度、落下速度、内部質量を表す無次元の相似変数である。

このとき、式 (3.13)、式 (3.14) を使えば中心の密度は、

$$\rho(0,t) = \frac{\eta(0)}{4\pi G(t_0 - t)} \tag{3.17}$$

と表せる。よって、時間 t が時刻 t_0 に近づくほど中心密度が増加し $t = t_0$ で発散する。次節で述べるように、この中心密度の発散の時刻 $t = t_0$ は、中心星形成の瞬間の時刻と見なせる。中心星形成前である Runaway Collapse 期を考えるときは、 $t < t_0$ とする。このとき、 x は、正となる。後で中心星形成後を扱うときは、 $t > t_0$ すなわち、 x を負とする。

時間進化する物理量の分布は、相似座標系から見ると時間的に不変な関数形として見える。次に、このような関数形（相似解）を考える。式 (3.1) ~ 式 (3.3) の基礎方程式系を相似座標系で表せば、

$$-(x-\xi)\frac{d\xi}{dx} + \eta(x-\xi)\frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{dx}, \tag{3.18}$$

$$x\frac{dm}{dx} - m - x^2\eta\xi = 0, \tag{3.19}$$

$$\frac{dm}{dx} + x^2\eta = 0, \tag{3.20}$$

となる。つまり、相似方程式は常微分方程式となる。整理すると、運動方程式は

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{x-\xi}{x}\frac{\eta x(x-\xi) - 2}{(x-\xi)^2 - 1} \tag{3.21}$$

連続の式は、

$$\frac{d\eta}{dx} = \eta\frac{x-\xi}{x}\frac{\eta x - 2(x-\xi)}{(x-\xi)^2 - 1}, \tag{3.22}$$

$$m = x^2\eta(x-\xi), \tag{3.23}$$

と書き直せる。この式 (3.21), 式 (3.22) を積分すれば相似解がもとまる。

3.1.3 Runaway Collapse 期における相似解の性質

相似解の重要な性質として、特異面の存在がある。相似方程式 (3.21)、 (3.22) は、$x=0$ もしくは $x-\xi=\pm1$ で右辺の分母がゼロとなり特異となっている。このとき分子も同様にゼロに収束しなければ解が発散する。解が発散しないための条件は、(3.21) と (3.22) より

$$x=0 \quad \text{において、} \quad \xi=0, \tag{3.24}$$
$$x-\xi=1 \quad \text{において、} \quad \eta x=2, \tag{3.25}$$
$$x-\xi=-1 \quad \text{において、} \quad \eta x=-2, \tag{3.26}$$

である。この特異面での条件により解が限定される。 (3.24) は、ガス球の中心で速度がゼロという境界条件となっている。

(3.25) と (3.26) は、相似座標から見て遷音速点にあたる。そのことは、以下のようにして示せる。実座標での定点は相似座標からみると外向きに xc_s の速さを持つ。まず、実座標で内向きにガスが速度 ξc_s で動くとき、相似座標から見ると、外向きの速速 v_r は、 $v_r=(x-\xi)c_s$ となる。この相似座標から見て外向きの速度 $v_r=(-\xi+x)c_s$ が音速 c_s となるのが $x-\xi=1$ である。そして、この遷音速点である特異面の内側（亜音速領域）と外側（超音速領域）で解が一続きにつながる条件が $\eta x=2$ である。これが、 (3.25) の条件となっている。 (3.26) は、相似座標から見て内向きの速度が音速を越える点である。この内向きの遷音速点の内側では亜音速、外側では超音速となっている。

特異面が遷音速面であることは、情報の伝達を考えると理解できる。つまり、情報は、 $v_r \pm c_s$ で伝わる。 $v_r=\mp c_s$ のとき空間を移動しない情報が発生する。そのような場合、周辺との調整ができず方程式が特異となるのである。

Runaway Collapse 期では、 x が正であるので特異点通過の条件 $\eta x=-2$ は満たされない。よって、 Runaway Collapse 期の相似解の特異面通過の条件は (3.24) と (3.25) となる。

相似方程式 (3.21)、 (3.22) には、幾つかの解析解が存在する。その相似解の例としては、

$$\begin{aligned} \xi(x) &= 0, \\ \eta(x) &= \frac{2}{x^2}, \end{aligned} \tag{3.27}$$

があり、これは平衡状態を表す解析解である。特異面 (3.25) は、 $x=1$ で条件を満たして通過している。式 (3.13)、 (3.14) と (3.15) の相似変数の定義式で通常の物理変数

の式に書き直せば

$$v_r(r,t) = 0,$$
$$\rho(r,t) = \frac{c_s^2}{2\pi G}\frac{1}{r^2}, \tag{3.28}$$

となり、球対称ガスの平衡解と一致している。この解では、中心密度が発散している。

興味があるのは、重力収縮を表す相似解なので、以後その種類の相似解のみ考える。 Whitworth & Summers (1985) は、相似方程式のテーラー展開により、相似解の漸近的な性質を調べた。 η_0、 A_+、 ξ_∞ を定数として、

$$x \ll 1 \quad \text{の場合}, \quad \xi = \frac{2}{3}x + \frac{2-3\eta_0}{135}x^3 + \mathcal{O}(x^5), \tag{3.29}$$
$$\eta = \eta_0 + \frac{\eta_0(2-3\eta_0)}{18}x^2 + \mathcal{O}(x^4), \tag{3.30}$$
$$x \gg 1 \quad \text{の場合}, \quad \xi = \xi_\infty - \frac{\eta_\infty - 2}{x} + \frac{\xi_\infty}{x^2} + \mathcal{O}(x^{-3}), \tag{3.31}$$
$$\eta = \frac{A_+}{x^2} - \frac{\eta_\infty(\eta_\infty - 2)}{2x^4} + \mathcal{O}(x^{-6}), \tag{3.32}$$

となる*。 $x \ll 1$ の漸近解では、条件 (3.24) を満たすように展開係数を決めてある。この展開によると、中心付近では、落下速度は、半径に比例して増加しており、密度は、一定となっている。一方、中心から十分離れたところでは落下速度は音速の ξ_∞ 倍で一定となり、密度は、 r^{-2} に比例している。この性質は、数値シュミレーションでの漸近的な性質と一致する（図 3.2）。

3.1.4 Runaway Collapse 期の相似解

Larson (1969)、 Penston(1969) は、特異面 (3.24) の解の通過が滑らかであると考えた。これにより、彼らは、ただ 1 つの解を数値積分により得た。これを図 3.2 に表した。彼らの得た相似解を以後、 Larson-Penston 解と呼ぶ。 Larson-Penston 解の漸近的な性質は、

$$\eta_0 = 1.667,$$
$$A_+ = 8.86,$$
$$\xi_\infty = 3.28, \tag{3.33}$$

*Whitworth & Summers (1985) では、 $x \ll 1$ について、 η の x^2 の係数に 18 分の 1 がミスにより書かれていない。

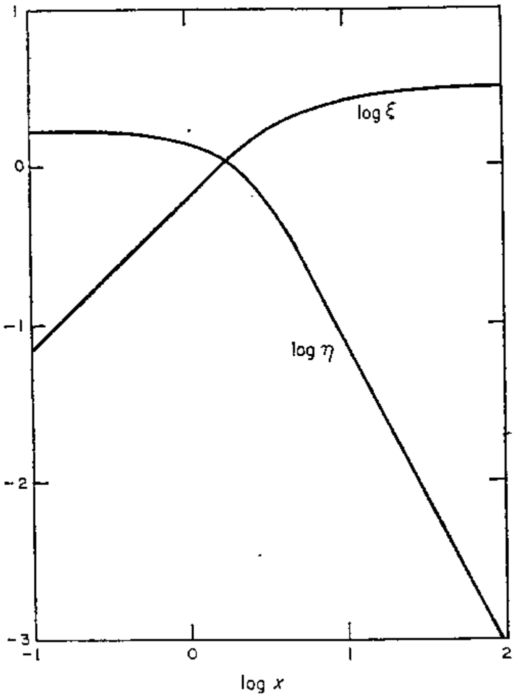


図 3.2: 球対称での Runaway Collapse 期の（Larson-Penston タイプの）相似解。ξ が落下速度、η が密度を表す相似変数。これによると、落下速度が、大きな半径でほぼ一定となり、密度が半径の -2 乗に比例している。(Larson 1969 より)

として表せる。

Whitworth & Summers (1985) は、特異面を解が通過するとき Larson、Penston の考えたような滑らかな解以外に解が無数個あることを指摘した。つまり、彼らは、特異面 $x = \xi + 1$ を解が通過するとき、指数関数的に $\eta = \dfrac{2}{x}$ に収束していき特異面を通過することを示した。このような解は、特異点で、速度微分や密度微分が不連続となることを許す。よって、相似解がバンド的に無数個存在する。

3.2 Inside-out Collapse 期の重力収縮

前節では、球の中心まで等温ガス流体であるモデルを考えていた。Shu (1977),Hunter (1977) は、球の中心に星が形成された後の進化を表す相似解を導いた。つまり、中心星が形成された瞬間を初期条件としその後の Inside-Out Collapse 期の進化を考える。

3.2.1 相似的進化を仮定した解析

等温的進化で、中心星の形成後（Inside-out Collapse 期）のガスの重力収縮進化を扱うことができる。等温的進化の仮定は、密度で 6 桁に渡って有効である。そのような等温的進化の仮定が破れるほど高密度となる領域は、全体のスケールから見てきわめて小さくなる。つまり、中心星は、原点に質点として存在するとみなせる。Shu (1977) は、Inside-out Collapse 期の進化を、このような中心に半径ゼロの中心星があるとしたモデルで記述されるとして、その相似解を導いた。中心星は、中心密度が無限大に発散した瞬間に形成されると考える。これは、中心にある中心星とそこに質量降着している球対称な等温ガスという描像にあたる。

このモデルでは、$M(0,t)$ が有限であること以外には Runaway Collapse 期と違いはない。つまり、ガスの満たすべき基礎方程式系は Runaway Collapse 期と同じ式 (3.1) ~ 式 (3.3) である。よって相似方程式も同じ式 (3.21)、式 (3.22) となる。ただ、時間 t は中心星形成の時刻 t_0 より後なので $t > t_0$ となる。ここで注意しなければならないのは、このとき $x < 0$ となることである。

Inside-out Collapse 期の相似進化の仮定から導き出される重要な物理量として、中心星への質量降着率がある。式 (3.16) で 中心 $r = 0$ を考えると

$$M(0,t) = \frac{c_s m(0)}{G}(t_0 - t), \tag{3.34}$$

となり、中心星の質量 $M(0,t)$ の増加が時間に対し一定であることがわかる。この質量降着率は $m(0)$ （< 0）により決まる。

3.2.2 Inside-out Collapse 期における相似解の性質

Nakamura et al.(1995) は、Inside-outCollapse 期の相似方程式のテーラー展開により、相似解の漸近的な性質を調べた $|x| \ll 1$ の場合についてのテーラー展開により、

$$\xi = \sqrt{\frac{2m(0)}{x}}, \tag{3.35}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{m(0)}{2x}} \tag{3.36}$$

となる。また、$|x| \gg 1$, $x < 0$ の場合についての漸近解は前節と同様となり、$\xi_{-\infty}$、A_- を定数として

$$\xi(x) \quad = \xi_{-\infty} - \frac{A_- - 2}{x} + \frac{\xi_{-\infty}}{x^2} + \mathcal{O}(x^3), \tag{3.37}$$

$$\eta(x) \quad = \frac{A_-}{x^2} - \frac{A_-(A_- - 2)}{2x^4} + \mathcal{O}(x^{-6}), \tag{3.38}$$

となる。

$|x| \gg 1$ の漸近解は、相似進化の定義より、中心星形成直後のすべての半径 r にわたる物理量を与える。つまり、 $t_0 - t = -0$ の中心星形成直後の場合、式 (3.13): $x = \dfrac{r}{c_s(t_0 - t)}$ より、相似座標の半径 x は実座標の半径の原点に収縮している。そのため実座標の半径 r が有限値ならいつも $|x| \gg 1$ である。よって、 (3.38) は、中心星形成直後のすべての半径 r で

$$\begin{aligned} \rho(r, t_0) &= \frac{A_- c_s^2}{4\pi G} r^{-2}, \\ v_r(r, t_0) &= -c_s \xi_{-\infty}, \end{aligned} \tag{3.39}$$

が成り立っていることを意味している。このように、 Inside-out Collapse 期の相似解では、 $x \to -\infty$ の振る舞い ($\xi_{-\infty}, A_-$) が、 Inside-out Collapse 期の初期条件を与える。

Inside-out Collapse 期にも、 Runaway Collapse 期と同様に、特異面がある。 $x = 0$ では、密度、速度が発散しており相似方程式 (3.21)、 (3.22) は特異である。一方、 $x < 0$ の領域では、特異面は (3.25) の代わりに

$$x = \xi - 1 \tag{3.40}$$

である。このとき、相似方程式 (3.21)、 (3.22) が特異とならないためには

$$\eta x = -2, \tag{3.41}$$

でなければならない。この特異面も Runaway Collapse 期と同様に、超音速と亜音速の境界である。しかし、 Inside-out Collapse 期では、物理的な解でも $x = \xi - 1$ を横切らないものがある。このような解は、原点から、無限遠までずっと超音速となっている。

3.2.3 Inside-out Collapse 期の相似解

中心星形成直後の状態 (初期条件) をどのように与えるかによっていくつかの後期の相似解がある。前節の議論により、 $\xi_{-\infty}$、 A_- の 2 つのパラメータがこの中心星形成直後の状態を決める。つまり、この 2 つのパラメータの取り方に対して Inside-Out 期の解が決まる。以下に、このパラメータの 2 通りの選び方とそのときの解を示す。

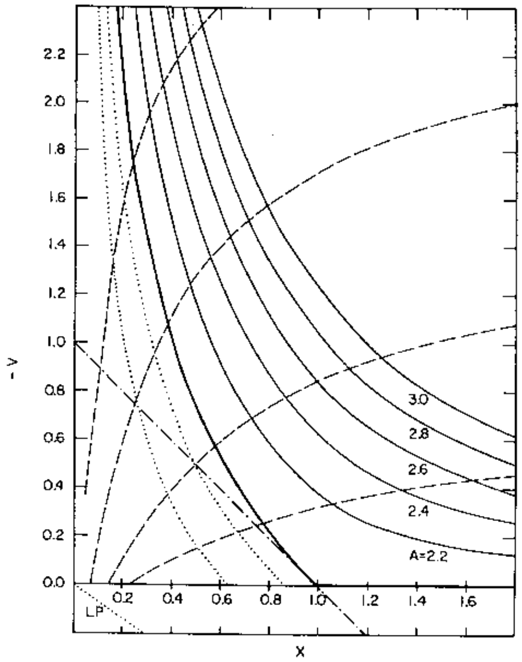


図 3.3: 球対称モデルでの Inside-Out Collapse 期の相似解。横軸が半径に対応する相似変数 x(本論文、 Larson 1969 での定義では、 $-x$ となる)。縦軸が音速で規格化した落下速度。図中の線は、種々の密度に対する解。図中の太い実線が現実的に妥当な解を表している。 (Shu 1977 より)

１つ目は、平衡状態を初期状態としたものである。 Shu (1977) は、中心で密度が発散している平衡状態を初期状態として Inside-out Collapse 期を表す相似解を導いた。式 (3.27) より、これは、

$$(\xi_{-\infty}, A_{-}) = (0, 2), \tag{3.42}$$

と選んだものである。

図 3.3 の太い実線が Shu の解である。 Shu は、我々と x の符号の定義が逆である。この Shu の解は、 $x = 1$ (我々の定義では、 $-x = 1$) を境界として内側と外側で性質がはっきり分かれている。境界の内側では、 落下速度が $r^{-1/2}$ に比例して増加しており、ほぼ自由落下となっている。外側では、落下速度がゼロの平衡状態のままである。密度は、 $x = 1$ (我々の定義では、 $-x = 1$) の内側で $r^{-3/2}$ に比例して増加して中心で発散している。外側では、初期状態のままの r^{-2} に比例する分布をしている。

この Shu の解を実空間で考察する。 (3.13) より Inside-Out 期では、 Runaway 期とは逆に、時間とともにこの相似形が広がる。言い換えると、相似座標 $-x = \alpha$ にあ

る定点は、実空間では、外側へ音速の α 倍の速さで移動していることになる。つまり Shu の解では、自由落下の領域が音速の速さで外へ広がっていくことになる。

また、(3.16) より、中心星の質量は、時間の比例して増加する。この比例定数は、中心星への質量降着率である。これは、$-\frac{c_s^3}{G}m(0)$ と表せる。Shu の解では、$m(0) = -0.975$ となる。分子雲コアの典型的な音速 0.2km/s を使うと、$0.2 \times 10^{-6}\mathrm{M}_{\odot}/yr$ となる。この質量降着率は、観測から導いた ~ 0.4 太陽質量程度の星の形成のタイムスケールのオーダー $\sim 10^{-5}$yr と一致する。

2 つ目は、Runaway Collapse 期の続きとしての Inside-out Collapse 期を考えるものである。Hunter (1977) は、Runaway Collapse 期の $t = t_0$ の極限を Inside-out Collapse 期の初期条件としてとった。つまり、この相似解は、Larson-Penston 解の中心星形成後への拡張である。初期条件は (3.33) より

$$(\xi_{-\infty}, A_{-}) = (3.28, 8.86), \tag{3.43}$$

としたものである。

このような Larson-Penston タイプの解は、Shu の解と同様の傾向となった。つまり、落下速度は、中心付近で $r^{-1/2}$ に比例していて、密度は、中心付近で $r^{-3/2}$ 、離れたところで r^{-2} に比例している。しかし、係数は Shu の解に比べて、かなり大きい。そして、Shu の解と決定的に異なるのは、中心から離れるとほぼ一定の落下速度 $\xi_{-\infty} = 3.28$ となることである。質量降着率を決める相似変数は、$m(0) = -46.915$ であり、Shu の解の 47 倍となっている。

どちらの場合も、中心付近では、ほぼ、自由落下となっている。そして外側では、Inside-out Collapse 期の初期状態となっている。この境界は、はじめ中心にあって、その後、音速で外側へ伝搬していく。落下 (collapse) が内から外へ (inside-out) 伝搬することから Inside-out Collapse いう呼び名がついた。

3.3 相似解とシミュレーションの比較

Boss & Black (1982) は、Runaway Collapse 期の計算およびを行なった。また、中心で特異となっている準平衡状態、

$$\rho(r) = \frac{c_s^2}{2\pi G} r^{-2}, \tag{3.44}$$

からの Inside-out Collapse 期の重力収縮の数値シミュレーションも行った。

まず、Runaway Collapse 期の計算では、密度は r^{-2} に比例する傾向が見られた。落下速度は、中心付近では半径に比例し、その後、一様速度 $3.28c_s$ となった。

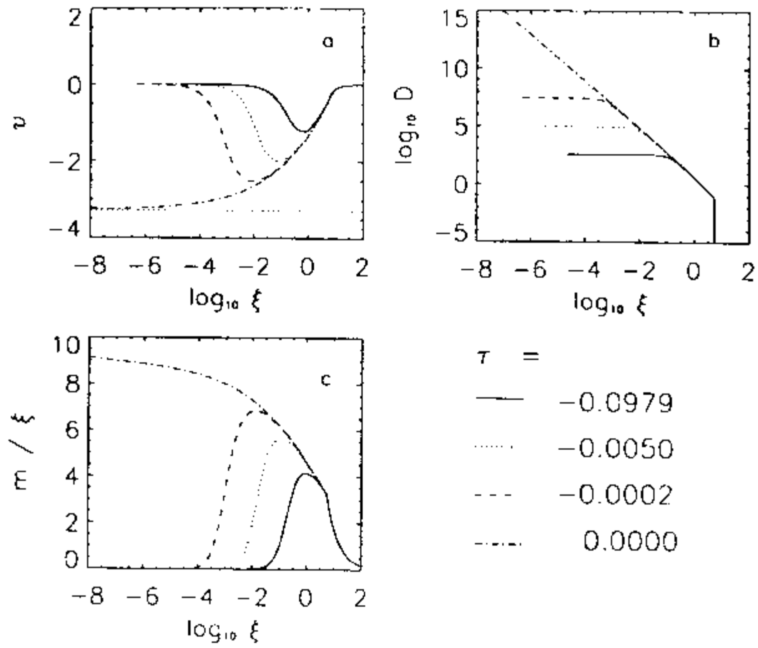


図 3.4: Runaway Collapse 期における、 Larson-Penston 解と数値シミュレーションを比較したもの。一点破線 ($\tau = 0$) が Larson-Penston 解を表し、その他の線がいろいろな時刻の数値シミュレーションでの結果を表している。 a がガスの速度 : v、 b が密度 : D,c が内部質量と半径の比を、それぞれ半径 : ξ に対してプロットしたもの。(Foster & Chevalier 1993 より)

Inside-out Collapse 期については、中心の付近で $\rho \propto r^{-3/2}, |v_r| \propto r^{-1/2}$、 外側で $\rho \propto r^{-2}$ となった。

これらは、相似解の性質と一致する。特に Inside-Out Collapse 期の数値シミュレーションでは、 Shu の方の解の性質と一致していた。これは、この計算において Inside-Out Collapse 期の初期条件を Shu と同様に準平衡状態とした事による。

Foster & Chevalier (1993) は、 Runaway Collapse 期とそれに一続きな Inside-out Collapse 期の重力収縮の数値シミュレーションを行った。さらに、彼らは、いろいろな初期条件からの数値シミュレーションの相似進化を調べ相似解と比べた。

図 3.4 は、 Larson-Penston 解と、シミュレーションの速度、密度を比べたものである。これにより、 Runaway Collapse 期については、無数個存在する相似解の中で Larson-Penston の相似解に漸近していくことを示した。 Runaway Collapse 期に続く Inside-out Collapse 期の進化は、中心の内部質量 $m(0)$ の増加について相似解

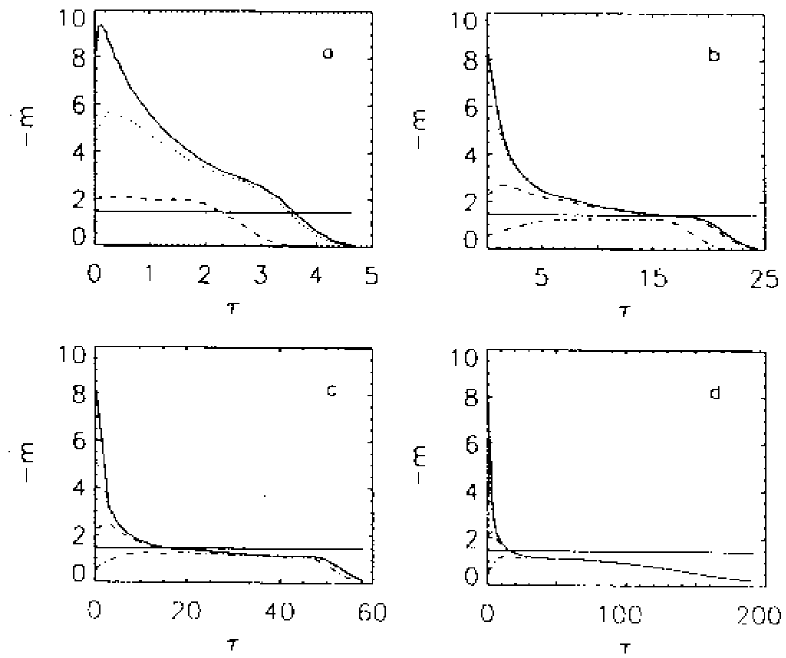


図 3.5: 質量降着率：$-m$ の時間変化。計算の境界となる半径を４種類とっており小さいほうから図 a,b,c,d としてある。それぞれ、縦軸が質量降着率横軸が時間。図中の $-m = 1.45$ の実線がほぼ Shu の解での質量降着率を表す。破線、点線、実線は、それぞれ $-m(3.0)$、 $-m(1.0)$ と $-m(0.3)$ を表す。(Foster & Chevalier 1993 より)

と比較した。図 3.5 にその値の時間的な変化を示した。この値は、 Shu の解では、 $m(0) = -0.975$ また、 Hunter による Larson-Penston の Inside-out Collapse 期の場合、 $m(0) = -46.915$ である。 Inside-out Collapse 期は、はじめ Larson-Penston 解的な進化をして、その後 Shu の解に近づくことがわかった。

これは、次のように理解できる。 Foster & Chevalier (1993) は、 Runaway Collapse 期の初期状態に準平衡状態の球を設定した。半径の大きな領域では、その進化のタイムスケールが遅い。よって、中心星が形成される時刻でも半径の大きな領域は平衡状態からあまり進化できない。よって、 Inside-Out Collapse 期の初期状態として、半径の小さい領域では、 Larson-Penston タイプ、半径の大きな領域では、 Shu タイプとなってしまう。このために、はじめ Larson-Penston 解的な進化をして、その後 Shu の解に近づく。

4　星形成の理論: 非球対称の場合

２章で触れたＴータウリ型星のように、星形成は、中心星とその周辺円盤によって特徴づけられることが観測により知られている。この章では、本修士論文でのモデルである軸対称なガス円盤での、今までに行われた研究をまとめる。

ガス円盤での取り扱いにおいても中心星形成を境に、大きく 2 つの段階に分けれれる。球対称の場合と同様に、前半を Runaway Collapse 期、後半を Inside-out Collapse 期と呼ぶことにする。また、研究手法も、球対称と同様に数値シミュレーションと、相似性を利用した半解析的なものがある。

数々の数値シミュレーションによる等温ガス重力収縮の研究により、円盤の形成がガスを貫く星間磁場やガスの角運動量によって説明できることが示されている。これについては、４・１節でまとめる。一方、球対称と異なり軸対称の場合、重力の取り扱いが複雑となる。よって、その相似解は、近似的にしか求まっていない。これについては、４・２節でまとめる。

4.1　数値シミュレーション

数々の数値シミュレーションにより円盤の形成がガスを貫く星間磁場やガスの角運動量によって説明できることが示された。この節では、円盤の形成を扱った数値シミュレーションによる研究をまとめる。これらの研究によると、はじめに回転や磁場によって支えられていない円盤が形成される。この円盤は軸方向には準静的であった。そして、動径方向には、赤道面の密度 $\rho_e(r) \propto r^{-2}$、面密度 $\Sigma(r) \propto r^{-1}$ という相似則に従って動的に収縮することが示された。

4.1.1　磁場に貫かれたガス雲の重力収縮

星間空間の磁場中に塵があると塵は、その磁場に対して直交するように整列する。このとき、背景の星の光は、その塵の吸収により偏光する。このような観測によって、分子雲、分子雲コアおよび形成過程にある星と磁場には、幾何学的に相関があることが知られるようになった。

このように、磁場が星形成に影響していると考えられる。よって、数値シミュレーションによる研究においても磁場に貫かれたガスを扱うようになった。このような磁場に貫かれたガスのシミュレーションは、Fielder & Mouschovias (1993)、Nakamura, Nakano & Hanawa (1995)、Tomisaka(1995) などの研究がある。

図 4.1 に Nakamura, Nakano & Hanawa (1995) のシミュレーションの結果をまた図 4.2 に Tomisaka(1995) の結果を表す。図 4.1(a)、図 4.2(b) を見ると、赤道面上の

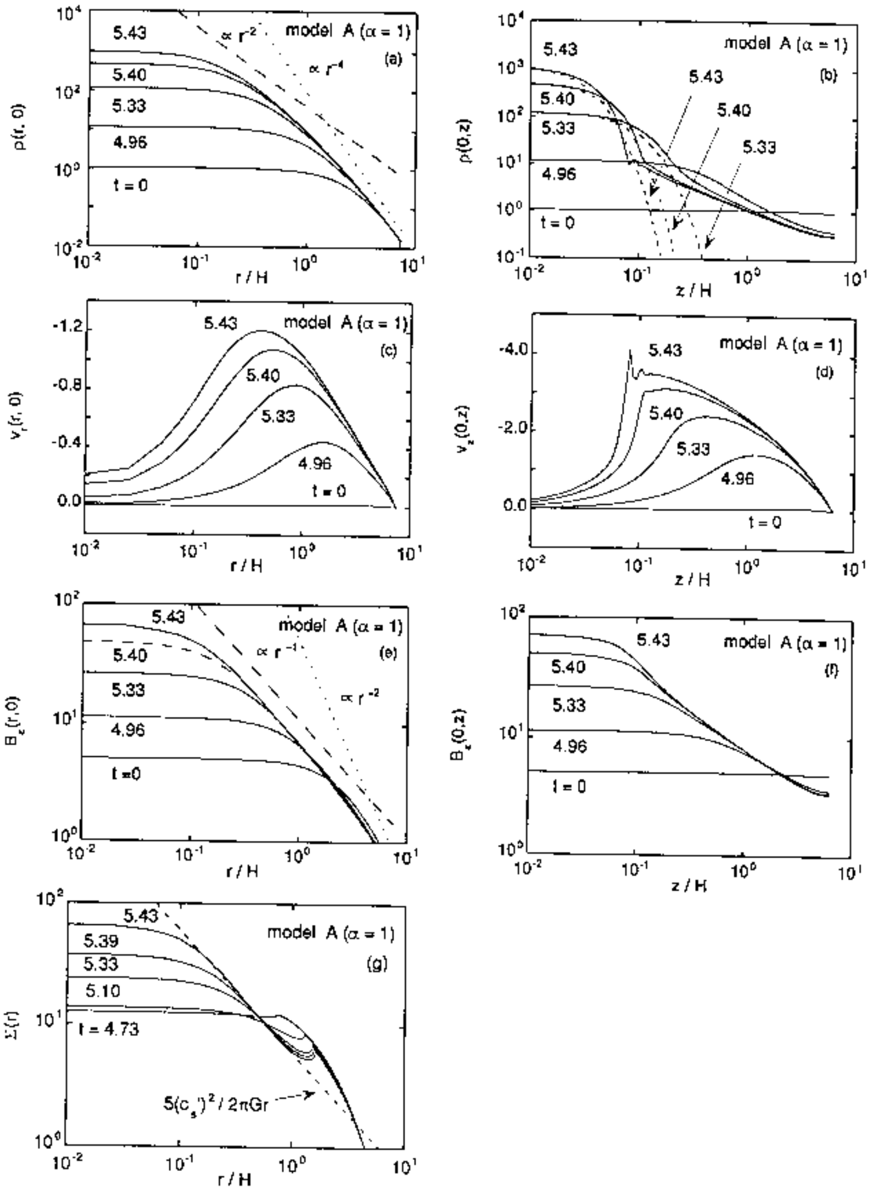


図 4.1: Nakamura et al.(1995) の 2 次元軸対称での数値シミュレーション（彼らのモデルＡ１）の結果。初期状態に速度ゼロの準平衡状態をとたもの。磁場の強さは、初期に磁気エネルギーと熱エネルギーの比が 1 で一様としてある。図の横軸は、円筒座標系での r、z を初期密度のスケールハイト H で規格化したもの。(a) 赤道面上でのガス密度、(b)z 軸上でのガス密度、(c) 赤道面上でのガス速度、(d)z 軸上での速度、(e) 赤道面上での磁場、(f)z 軸上での磁場、(g) ガス円盤の面密度。(Nakamura et al. 1995 より)

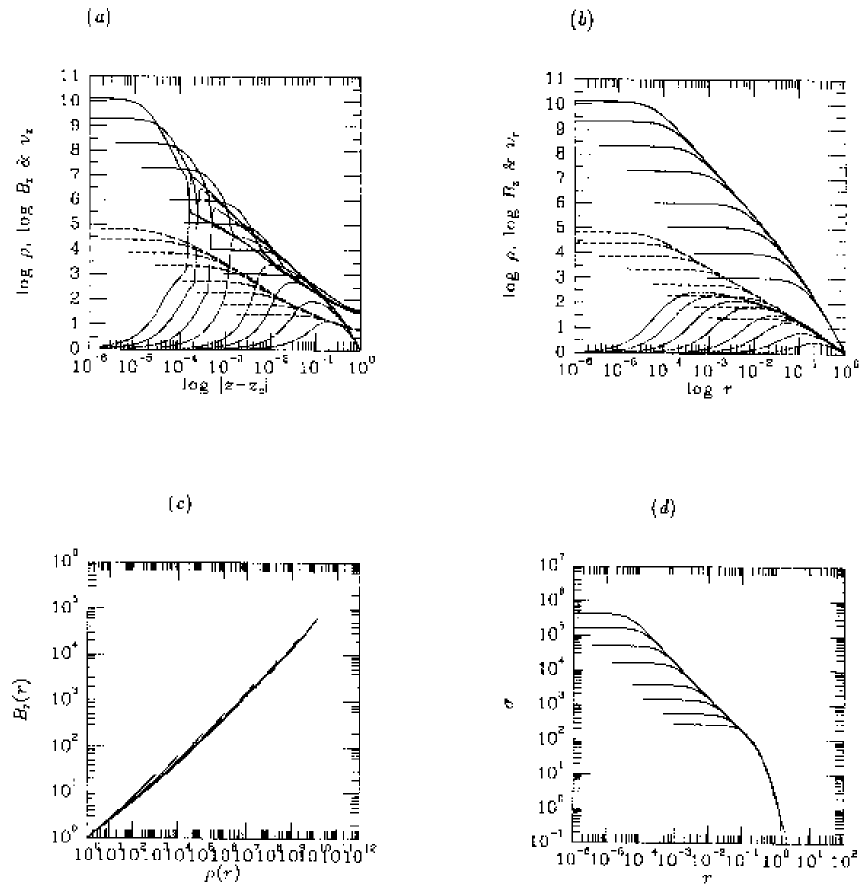


図 4.2: Tomisaka(1995) の 2 次元軸対称での数値シミュレーション（彼らのモデル A）の結果。磁場の強さは、初期に磁気エネルギーと熱エネルギーの比が 0.5 で一様としてある。初期の磁場は、 z 方向のみ。 (a)z 方向に対する密度、 z 方向の磁場、 z 方向の落下速度をそれぞれ実線、破線、点線で表したもの。 (b) 半径方向に対する密度、半径方向の磁場、半径方向の落下速度をそれぞれ実線、破線、点線で表したもの。 (c) 赤道面上での z 方向の磁場と密度の相関。 (d) 半径方向に対する面密度分布。 (tomisaka 1995 より)

密度が球対称の場合と同様に r^{-2} に漸近するようにして相似的に進化しているのがわかる。また、図 4.1(g)、図 4.2(d) のように z 方向に密度を積分した面密度は、 r^{-1} に漸近するように相似的進化しているのがわかる。一方、落下速度については、図 4.1(c)、図 4.2(b) の半径方向の例を見ると分かるようにはっきりとは相似的進化が見られない。これは、計算の外側の境界の影響を大きく受けているためである。

幾何学的には、どちらの場合も磁場に垂直な薄い円盤が形成された。そして、この薄い円盤は、 z 方向には準平衡状態、半径方向には動的な収縮をしていた。図 4.1(b)、(d) をみると z 方向に高密度な部分が形成され、そこでの z 方向の落下速度が小さいのがわかる。その外側には、低密度で z 方向の落下速度が大きな領域がある。図 4.2(a) を見ても同様のことが分かる。

4.1.2 回転しているガス雲の重力収縮

回転している等温ガスの重力収縮の数値シミュレーションは、７０年代から多くの研究が行われてきた。現在までに、回転しているガス雲の重力収縮の数値シミュレーションは、 Runaway Collapse 期のみ行なわれている。 Norman et al. (1980) は、角運動量の保存を精度よく満たす数値シミュレーションを初めて行った。これによると、前節の磁場に貫かれたガスの場合と同様に、動的に収縮する幾何学的に薄い円盤にが形成されることが分かった。 Matsumoto et al.(1995) は、相似進化を利用して、時間と共に収縮する座標を使った。これにより、初期に対して 10^7 も高い密度まで計算できた。そして結果をもとに、２次元軸対称の数値シミュレーションでの相似進化を研究した。この Matsumoto et al.(1995) の数値シミュレーションの結果を図 4.3(a)(b) に表した。

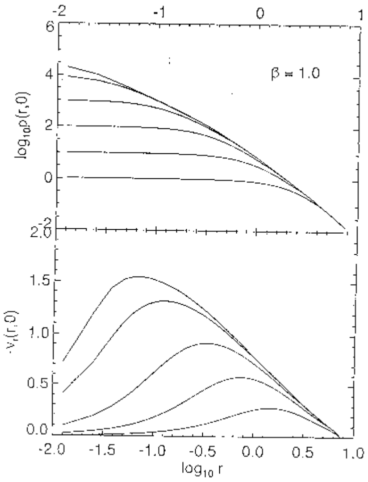


図 4.3(a): Matsumoto et al. (1995) の 2 次元軸対称の数値シミュレーション（モデルＡ１）の結果。赤道面上の密度と、半径方向の落下速度の半径に対する分布（対数）。図中の実線は、いろいろな時刻の分布を表しており、下から自由落下時間を単位として -0.19,-0.086,-0.042,-0.025,-0.016 である。初期状態に回転を与えた準な平衡ガス円柱をとってある。回転は、初期に回転エネルギーと熱エネルギーの比が 1.0 で一様としてある。(Matsumoto et al. 1995 より)

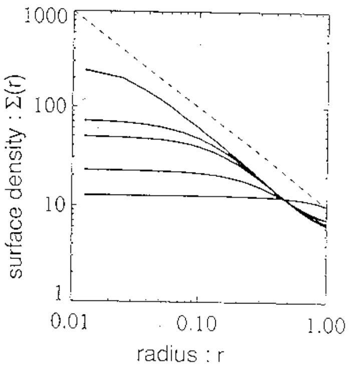


図 4.3(b): Matsumoto et al. (1995) の 2 次元軸対称の数値シミュレーション（モデルＡ１）の結果。面密度の半径に対する分布（対数）。図中の破線は、 r^{-1} に比例する分布を表している。これによると面密度は、半径に逆比例する分布に漸近するようにして相似的進化している。(Matsumoto et al. 1995 より)

4.2 半解析的な方法

シミュレーションにより示された円盤が幾何学的に薄いという特徴を使えば、軸方向の物理量を積分することにより変数を (r,t) と出来て問題を 1 次元円盤の時間進化に簡単化できる。

この円盤の重力収縮による進化の解析的な研究は、球対称のときと同様に相似的進化を仮定して行われてきた。しかし、薄い円盤の重力を解くことにより、解くべき方程式が非線形な微分積分方程式となり、解くのが非常に困難となる。

これまでの研究としては、 Narita et al.(1984) と Nakamura et al. (1995) による近似的な研究がある。 Narita et al.(1984) は、シミュレーションで得た解と似た関数形を相似解の関数形であると仮定した。また、 Nakamura et al.(1995) は、薄い円盤ではなく球対称な重力場を使って相似解を導た。

この節では、我々の研究の基礎となる今までの研究をまとめる。

4.2.1 基礎方程式系

自己重力を考えた等温ガスの基本方程式を円筒座標 (r,φ,z) で表す。重力ポテンシャルを $\Phi(r,\varphi,z)$、回転速度を $v_\varphi(r,\varphi,z)$ とすると
連続の式は；

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\rho v_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\rho v_\varphi)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}(r\rho v_z)=0, \tag{4.1}$$

運動方程式は；

$$\rho\left\{\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi}-\frac{v_\varphi^2}{r}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\right\}=-\frac{\partial P}{\partial r}-\rho\frac{\partial\Phi}{\partial r}, \tag{4.2}$$

$$\rho\left\{\frac{\partial v_\varphi}{\partial t}+\frac{v_r}{r}\frac{\partial r v_\varphi}{\partial r}+\frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}+v_z\frac{\partial v_\varphi}{\partial z}\right\}=-\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial\varphi}-\frac{\rho}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}, \tag{4.3}$$

$$\rho\left\{\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\varphi}\right\}=\frac{\partial P}{\partial z}-\rho\frac{\partial\Phi}{\partial z}, \tag{4.4}$$

ポアソン方程式は；

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=4\pi G\rho, \tag{4.5}$$

と表される。圧力 $P(r,\varphi,z)$ は等温ガスなので音速 c_s を定数として $P=c_s^2\rho$ を満たす。

我々のモデルは、２次元軸対称 (r,z) であるので、、

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}=0, \tag{4.6}$$

である。ここで、単位質量当たりの角運動量を

$$j(r,\varphi,z)=rv_\varphi(r,\varphi,z) \tag{4.7}$$

と表すことにする。以上により、基礎方程式系は、
連続の式；

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\rho v_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}(r\rho v_z)=0, \tag{4.8}$$

運動方程式；

$$\rho\left\{\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}-\frac{j^2}{r^3}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right\}=-c_s^2\frac{\partial\rho}{\partial r}-\rho\frac{\partial\Phi}{\partial r}, \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial j}{\partial t}+v_r\frac{\partial j}{\partial r}+v_z\frac{\partial j}{\partial z}=0, \tag{4.10}$$

$$\rho\left\{\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right\}=-c_s^2\frac{\partial\rho}{\partial z}-\rho\frac{\partial\Phi}{\partial z}, \tag{4.11}$$

ポアソン方程式；

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=4\pi G\rho, \tag{4.12}$$

となる。(4.10) は、角運動量保存則を意味している。

4.2.2 Thin Disk 近似

前節で述べたように数値シミュレーションにより、形成される円盤には特徴がある。それは、幾何学的に薄く、軸方向に準静的というものである。この特徴を使えば Thin Disk 近似と呼ばれる簡単化ができる。つまり、ガス円盤に以下のような仮定をする。
(1) 円盤の z 軸方向は、静水圧平衡となっている。
(2) 密度、重力ポテンシャルの変化が z 方向の変化に比べて r 方向の変化は、無視できるほど小さい。
(3) 重力については、無限に薄い円盤のポアソン方程式を解くことにする。

(1) と (2) の仮定より密度の z に対する分布を考える。力の釣り合いの式とポアソン方程式は、赤道面での密度を $\rho_e(r)$ と書くと、

$$\frac{c_s^2}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \tag{4.13}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 4\pi G \rho, \tag{4.14}$$

となる。これは、2 階の微分方程式となる。よって、$z \to \infty$ で $\rho(r,z) \to 0$ また $z = 0$ の密度を $\rho_e(r)$ とおくと (4.13) と (4.14) は、

$$\rho(r,z) = \frac{\rho_e(r)}{cosh^2(\frac{z}{h(r)})}, \tag{4.15}$$

$$2\pi G \rho_e(r) h(r)^2 = c_s^2, \tag{4.16}$$

と書けて、z 方向の分布が一意に決まる。ここで $h(r)$ は、z に対する厚みを表す変数である。このように、(1) と (2) の仮定より物理量が赤道面上での密度 $\rho(r,0)$ のみに依存する関数として記述できる。

このような円盤の進化は、z 軸方向を積分して、半径方向の分布のみを考えれば十分である。まず、面密度 $\Sigma(r)$ を

$$\Sigma(r) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \rho(r,z) dz, \tag{4.17}$$

と定義する。(4.15) と (4.16) 式を使うと、この面密度には、赤道面での密度 $\rho_e(r)$ と

$$\rho_e(r) = \frac{\pi G}{2c_s^2}\Sigma(r)^2, \tag{4.18}$$

という一意な関係があることが示せる。次に、円盤での z に対して積分した半径方向の重力加速度を

$$g_r(r) \equiv \frac{1}{\Sigma(r)}\int_{-\infty}^{\infty} \rho(r,z)\frac{\partial \Phi}{\partial r} dz, \tag{4.19}$$

とする。ここで、g_r は、内向きを正とした。式 (4.8) ~ 式 (4.12) の基礎方程式の z 軸方向を積分すると、連続の式、運動方程式と角運動量保存則は、

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[r\Sigma v_r] = 0, \tag{4.20}$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{c_s^2}{\Sigma}\frac{\partial \Sigma}{\partial r} - \frac{j^2}{r^3} + g_r = 0, \tag{4.21}$$

$$\frac{\partial j}{\partial t} + v_r\frac{\partial j}{\partial r} = 0, \tag{4.22}$$

となる。

次に、(3) の仮定を使って内向きの重力加速度 g_r を密度分布によって表す。このとき (2) より赤道面に無限に薄く質量 $\Sigma(r)$ があるとしているのでポアソン方程式は、

$$4\pi G\Sigma(r)\delta(z) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}, \tag{4.23}$$

と書ける。この式を解くには、Bessel 関数を積分核とする変則、Hankel 変換

$$\tilde{f}(k) = \int_0^\infty rJ_n(rk)f(r)dr, \tag{4.24}$$

と、逆 Hankel 変換

$$f(r) = \int_0^\infty kJ_n(rk)\tilde{f}(r)dk, \tag{4.25}$$

を使う。面密度の半径への波数空間での展開を $\tilde{\Sigma}(k)$ とすると、

$$\tilde{\Sigma}(k) = \int_0^\infty rJ_0(rk)\Sigma(r)dr, \tag{4.26}$$

と表される。ここで、ポアソン方程式 (4.23) の波数空間での表現は、(4.24) より

$$4\pi G\tilde{\Sigma}(k)\delta(z) = -k^2\tilde{\Phi}(k,z) + \frac{\partial^2\tilde{\Phi}}{\partial z^2}, \tag{4.27}$$

となる。$\tilde{\Phi}(k,z)$ は、重力ポテンシャルの半径による波数空間での表現である。この (4.27) 式は、z に対して解けて

$$\tilde{\Phi}(k,z) = -\frac{2\pi G\tilde{\Sigma}(k)}{k}e^{-k|z|i}, \tag{4.28}$$

となる。これに (4.26) を代入してから実空間の重力ポテンシャルに逆 Hankel 変換すると

$$\Phi(r,z) = -2\pi G\int_0^\infty\int_0^\infty J_0(kr)J_0(kr')\Sigma(r')r'e^{-k|z|i}dkdr', \tag{4.29}$$

となる。よって、両辺を微分して Bessel 関数の関係式

$$\frac{J_0(x)}{dx} = -J_1(x) \quad , \tag{4.30}$$

を使うと、

$$\frac{\partial\Phi(r,z)}{\partial r} = 2\pi G\int_0^\infty\int_0^\infty J_1(kr)J_0(kr')\Sigma(r')r'e^{-k|z|i}dkdr', \tag{4.31}$$

と表される。赤道面上 $z=0$ での重力で g_r を近似的に考えると、

$$g_r(r) = 2\pi G\int_0^\infty\int_0^\infty J_1(kr)J_0(kr')\Sigma(r')r'kdkdr', \tag{4.32}$$

と表される。

以上、(4.20)、(4.21)、(4.22) 及び、(4.32) 式 が我々の扱ったモデルに Thin Disk 近似を施した基礎方程式系となる。

4.2.3 相似変数及び相似方程式系

次に、この円盤の相似進化モデルにおいて、半径及び各物理量の目盛りの時間進化を考える。このとき球対称のでの Larson の方法を手本とする。それにより、相似変数と相似方程式系を導く。

２章での説明のように、物理量、空間座標の目盛りが時間的に変化することで、物理量分布の時間進化しないように見える座標系が相似座標系である。仮定によりそのような相似座標系が存在するとする。$a(t)$ を時間 t にのみ依存する関数とする。半径 r は、目盛りの時間依存を表す $a(t)$ を使って、相似座標の半径 s と

$$s = \frac{r}{a(t)}, \tag{4.33}$$

の関係にあると置くことができる。これに対し、物理量の目盛りの時間進化を考えると、時間にのみ依存する関数 $b(t), c(t), d(t)$ を使って

$$\Sigma(r,t) = b(t)\Sigma_1(s), \tag{4.34}$$

$$v_r(r,t) = c(t)v_{r1}(s), \tag{4.35}$$

$$g_r(r,t) = d(t)g_{r1}(s), \tag{4.36}$$

$$j(r,t) = e(t)j_1(s), \tag{4.37}$$

と置ける。$a(t)$ ~ $e(t)$ はある時刻 $t=t'$ のときすべて 1 となっている。

下付き添え字 1 をもつ物理量が時間変化しないような $a(t)$ ~ $e(t)$ の関数形を調べる。これには、時間依存の関数が変数分離できればよい。(4.33) ~ (4.37) を Thin

Disk 近似を施した基礎方程式系 (4.20)、 (4.21)、 (4.22) 及び、 (4.32) 式 に代入すると、

$$-\frac{\dot{a}b}{a}s\frac{d\Sigma_1}{ds}+\dot{b}\Sigma_1+\frac{bc}{a}\left\{\frac{\Sigma_1 v_{r1}}{s}+\Sigma_1\frac{dv_{r1}}{ds}+v_{r1}\frac{d\Sigma_1}{ds}\right\}=0, \tag{4.38}$$

$$-\frac{\dot{a}c}{a}s\frac{dv_{r1}}{ds}+\dot{c}v_{r1}+\frac{c^2}{a}v_{r1}\frac{dv_{r1}}{ds}-\frac{\dot{a}}{a}\frac{sc_s^2}{\Sigma_1}\frac{d\Sigma_1}{ds}+\frac{1}{b}\frac{db}{dt}c_s^2+(d)g_{r1}-\frac{e^2}{a^3}\frac{j_1^2}{s^3}=0, \tag{4.39}$$

$$-\frac{\dot{a}e}{a}s\frac{dj_1}{ds}+\dot{e}j_1+\frac{ce}{a}v_{r1}\frac{dj_1}{ds}=0, \tag{4.40}$$

$$g_{r1}d=b2\pi G\int_0^\infty\int_0^\infty J_1(ys)J_0(ys')\Sigma_1(s')s'ydyds', \tag{4.41}$$

となる。ここでドットのついたものは、時間微分 $\dot{a}\equiv da/dt$ を表す。条件を満たすためには、

$$\begin{aligned} a &\propto t, \\ b &= a^{-1}, \\ c &= 1, \\ d &= a^{-1}, \\ e &= a, \end{aligned} \tag{4.42}$$

の関係が成り立てばよい。また、内部質量

$$M(r,t)=\int_0^r 2\pi r\Sigma(r,t)dr, \tag{4.43}$$

も (4.42) の関係式より $M(r,t)=a(t)M_1(s)$ と書ける。

　このように、時間に依存する関数がわかると、相似座標が書ける。 c_s と G により無次元化すると相似座標は、

$$x=\frac{r}{c_s(t_0-t)}, \tag{4.44}$$

$$v_r(r,t)=-c_s\xi(x), \tag{4.45}$$

$$\Sigma(r,t)=\frac{c_s}{2\pi G(t_0-t)}\sigma(x), \tag{4.46}$$

$$g_r(r,t)=\frac{c_s}{t_0-t}\gamma(x), \tag{4.47}$$

$$M(r,t)=\frac{c_s^3(t_0-t)}{G}m(x), \tag{4.48}$$

と表せる。ここで、t_0 は球対称のときと同様に、$r=0$ で密度が発散する時刻である。

回転を表す比角運動量 j は内部質量 M と同じ時間依存性を持っている。よって、相似進化を仮定すると $\dfrac{j}{M}$ が常にある値で一定でなければならな。よってその比を無次元パラメータ ω を使って表すと

$$j \equiv \omega \frac{G}{c_s} M, \tag{4.49}$$

と書ける。(4.48) を使って相似変数で表すと

$$j = \omega c_s^2 m(x) \tag{4.50}$$

となり、このように相似進化するときは 1 つのパラメータ：ω のみで回転を表すことができる。

相似変数によって基礎方程式 (4.20)、(4.21)、(4.22)、(4.32) 及び (4.43) を書き直すと、
連続の式は、

$$x\sigma \frac{d\xi}{dx} + x(\xi - x)\frac{d\sigma}{dx} + \sigma(\xi - x) = 0, \tag{4.51}$$

運動方程式は、

$$(\xi - x)\frac{d\xi}{dx} + \frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma}{dx} + \gamma - \frac{\omega^2 m^2}{x^3} = 0, \tag{4.52}$$

角運動量保存則は、

$$(\xi - x)\frac{dm}{dx} + m = 0 \tag{4.53}$$

内部質量の定義式は、

$$m = \int_0^x x\sigma dx, \tag{4.54}$$

となる。ポアソン方程式は、

$$\gamma = \int_0^\infty \int_0^\infty J_1(kx)J_0(kx')\sigma(x')x'kdkdx', \tag{4.55}$$

(4.51)、(4.52)、(4.53)、(4.54) 及び (4.55) 式は、4 式のみ独立である。以下の計算では、次の 4 つを独立な式としてとりあげる。1 つは、運動方程式 (4.52) を連続の式 (4.51) とまとめた

$$F(x) \equiv \left\{(\xi - x)^2 - 1\right\}\frac{d\sigma}{dx} + \sigma\left[\frac{(\xi - x)^2}{x} - \gamma + \frac{\omega^2 m^2}{x^3}\right] = 0, \tag{4.56}$$

である。これは、ξ の微分を消去して σ の微分方程式に変形したものである。この運動方程式 (4.56) を以後 $F(x)$ と表すことにする。２つ目は、(4.53) と (4.54) より

$$m = -(\xi - x)\sigma x, \tag{4.57}$$

としたもの。

３つ目、４つ目は、それぞれ (4.55) 式と (4.54) 式とする。

以上、(4.54)、(4.55)、(4.56)、(4.57) 式が解くべき相似方程式系である。

4.2.4 実効的な音速、重力定数の導入

Nakamura et al. は、Thin Disk で回転のない場合（$\omega = 0$）について、簡単に磁場を入れたモデルに拡張できることを示した。この節では、この方法について説明する。

垂直な磁場に貫かれたガス円盤を考える。このとき、磁場のないときに対し磁気圧によって音速が大きく、また、磁気張力によって重力が弱くなったように見える。実際、回転がない場合、磁場なしのモデルで実効的に音速と重力定数を変えれば磁場に貫かれたモデルも表現できる。

磁場を含んだときの運動方程式は、

$$\rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\nabla \left(P + \rho\Phi\right) - \nabla \left(\frac{B^2}{8\pi}\right) + \frac{1}{4\pi}\left(\boldsymbol{B}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{B}, \tag{4.58}$$

と表される。右辺、第二項が磁気圧、第三項が磁気張力と呼ばれる力である。

まず、磁気張力を考える。磁気張力の r 成分は、

$$\frac{1}{4\pi}\left(B_r\frac{\partial}{\partial r} + B_z\frac{\partial}{\partial z}\right)B_r \simeq \frac{1}{4\pi}B_z\frac{\partial}{\partial z}B_r, \tag{4.59}$$

となる。z 方向に積分すると Thin Disk 近似での磁気張力 (f_t) は、

$$f_t = 2\frac{B_z B_r}{4\pi} \tag{4.60}$$

と表される（２が掛かっているのは、円盤の裏も積分するからである）。

磁場は、ガスに完全に凍りついているとする。収縮の初期が一様密度、一様磁場であったとすると赤道面上の磁場は、$B_{z,0}(r) \propto \Sigma(r)$ と表される。さらに、円盤の外では、current free

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = 0, \tag{4.61}$$

と考える。このとき磁場は、磁気ポテンシャル Ψ を使って $\boldsymbol{B}=-\nabla\Psi$ と表される。これを使えば、磁気張力は

$$f_t=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial\Psi}{\partial r}, \tag{4.62}$$

となる。磁気ポテンシャル Ψ は、重力ポテンシャルで書き直せる。ポアソン方程式 $\nabla^2\Phi(r,z)=4\pi G\rho(r,z)$ を z 方向に積分すると（円盤の裏も積分することに注意）、

$$\left.\frac{\partial\Phi(r,z)}{\partial z}\right|_{z=0} \simeq 2\pi G\Sigma(r), \tag{4.63}$$

となる。

結局、磁気ポテンシャル Ψ は、重力ポテンシャルによって

$$\Psi=\frac{B_{z,0}}{2\pi G\Sigma}\Phi, \tag{4.64}$$

と表せる。よって、磁気張力は、

$$f_t=\frac{B_{z,0}^2}{8\pi^3G^2\Sigma^2}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial\Phi}{\partial r}, \tag{4.65}$$

と書きかえることができる。一方、重力を f_g と書きポアソン方程式で書き直すと

$$f_g=-(\Sigma)\frac{\partial\Phi}{\partial r}=-\left(\frac{1}{2\pi G}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial r}, \tag{4.66}$$

となる。以上より磁気張力と重力には、

$$f_t=-\left(\frac{B_{z,0}^2}{4\pi^2G\Sigma^2}\right)f_g \tag{4.67}$$

という関係がある。磁気張力によって弱められた見かけの重力は、 f_g+f_t である。つまり磁気張力は、実効的な重力定数を G' と書くと $G'=\left(1-\frac{B_{z,0}^2}{4\pi^2G\Sigma^2}\right)G$ となる。

ここで、ガスの熱エネルギーと磁気エネルギーの比を α と表すことにする。赤道上の密度を ρ_c とする。 Thin Disk 近似の関係式

$$\rho_c=\frac{\pi G\Sigma^2}{2c_s^2}, \tag{4.68}$$

より、

$$\begin{aligned}\alpha &\equiv \frac{B^2}{4\pi c_s^2\rho_c},\\ &=\frac{B^2}{4\pi^2G\Sigma^2},\end{aligned} \tag{4.69}$$

これを使うと、

$$G' = (1-\alpha)\,G, \tag{4.70}$$

となる。

次に、磁気圧を考える。磁気圧は、実効的な圧力を $P' = P + \dfrac{B^2}{8\pi^2}$ とすれば簡単に表せる。これを、磁気張力の場合と同様に書き直すと、

$$\begin{aligned} {c_s'}^2 &= c_s^2 + \frac{B^2}{8\pi\rho_c} \\ &= c_s^2(1+\alpha), \end{aligned} \tag{4.71}$$

となる。

結局、磁場に貫かれたものを表現するには、音速 c_s と重力定数 G の代わりに、(4.71)、(4.70) で表した実効的な音速 c_s' と重力定数 G' を使えばよい。これは、相似方程式系には影響はない。つまり、無次元量から (4.44) ~ (4.48) を使って物理量に戻すときに考慮するだけでよい。

4.2.5 近似的な解とその性質

Narita et al. (1984) は、シミュレーションにより得られた面密度分布をまねた関数形を面密度分布として置くことで、その性質を調べた。以下に、その研究をまとめる。

密度分布を折れ曲がりの位置を表す 2 つのパラメータ $a_c(t), \Sigma_c(t)$ により、

$$\Sigma(r) = \frac{\Sigma_c a_c^n}{(a_c^2 + r^2)^{n/2}}, \tag{4.72}$$

という関数形だと仮定する。この 2 つのパラメータは時間に依存し、シミュレーションによると、図 4.4 のように移動する。この図及び相似進化を仮定すると $\Sigma_c \propto a_c^{-n}$ でなければならないことより $n=1$ となることが示される。このとき、

$$2 = \frac{\pi G}{c_s^2}\Sigma_c a_c, \tag{4.73}$$

であった[†]。

この近似的な解を使ってその回転に対する性質を調べる。まず、数値シミュレーションにより単位質量当たりの角運動量は、保存することが示されているので、それに $\dfrac{c_s}{G}$ を掛けて無次元化したものを回転の強さを表す定数 ω とおく。

[†] Narita et al. (1984) では左辺が 4 となっている。しかし、これは圧力の計算ミスである。彼らは、音速 c_s を $\sqrt{2}$ 倍だけ小さく見積もっている。

このとき、連続の式、ポアソン方程式の $r \ll 1$ での展開した式が面密度分布モデル (4.72) に対し、より高次の項まで合うためには、

$$\dot{a_c}^2 = 4(1 - 4\omega^2)c_s^2 \tag{4.74}$$

であればよい[‡]。5 章でこの擬似的な解を相似座標によって表現した。図 5.10 にそれを示した。

4.2.6　球対称重力場での解

Nakamura et al. (1995) は、相似解の性質を調べるために、薄い円盤の重力を球対称な重力場で置き換えた。彼らの研究は、回転をしていない場合についてなので $\omega = 0$ である。彼らは、ポアソン方程式 (4.32) の代わりに。球対称重力場

$$g_r(r,t) = \frac{GM(r,t)}{r^2}, \tag{4.75}$$

で考えた。これにより、(4.55) 式は、

$$\gamma = \frac{m}{x^2}, \tag{4.76}$$

となる。これは、非線形な積分微分方程式を解くのを避けるためである。

(4.54)、(4.56)、(4.57)、(4.76) の相似方程式を使うと、

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{x-\xi}{x}\frac{(x-\xi)\sigma - 1}{(x-\xi)^2 - 1}, \tag{4.77}$$

$$\frac{d\sigma}{dx} = \frac{x-\xi}{x}\frac{\sigma[\sigma - (x-\xi)]}{(x-\xi)^2 - 1}, \tag{4.78}$$

とまとめられた相似方程式となる。

この漸近的な解は、テーラー展開により求まる。σ_0, ξ_∞, A を定数として $x \ll 1$ の場合、

$$\xi = \frac{x}{2} - \frac{\sigma_0}{12}x^2 + \mathcal{O}(x^3) \tag{4.79}$$

$$\sigma = \sigma_0 - \frac{\sigma_0^2}{2}x + \mathcal{O}(x^2) \tag{4.80}$$

$x \gg 1$ の場合、

$$\xi = \xi_\infty + \frac{1-A}{x} + \mathcal{O}(x^{-2}), \tag{4.81}$$

[‡] ω の前の係数も Narita et al. では 8 となるがこれも、同様の理由で誤りである。

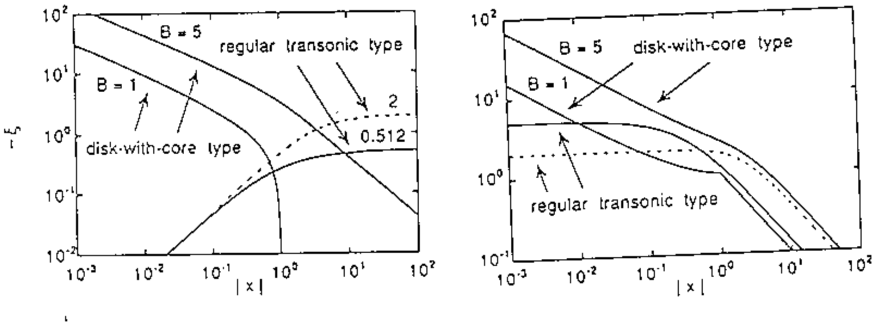


図 4.4: Nakamura et al.(1995) による Runaway Collapse 期、 Inside-Out Collase 期の近似解。左が落下速度、右が面密度の半径に対する分布。図中、 Runaway Collapse 期の解は、'regular transonic type'、 Inside-Out Collapse 期の解は、'disk-with-core type'と表現されている。 (Nakamura et al. 1995 より)

$$\sigma = \frac{A}{x} - \frac{A(A-1)}{2x^3} + \mathcal{O}(x^{-5}), \tag{4.82}$$

となる。

また、 相似方程式をルンゲクッタ法を用い数値的に積分した解を、図 4.5 に表す。図 4.5a は、落下速度の分布、図 4.5b は、面密度の分布であり、それぞれ、球対称のときの Larson-Penston 解と、原始星形成後の解である Shu の解の 2 種の解について表してある。

Larson-Penston 解について、特異点は $x = 1.29$ となりる。また、漸近的には、

$$\xi_\infty = 0.512, \sigma_0 = 5.05, A = 1.48, \tag{4.83}$$

となっている。

後期解については Shu の解で、 $A = 1$ と $A = 5$ という適当な初期値から積分をはじめてみたものが図示してある (彼らは、 A ではなくて B と書いている。)。

5　研究方法及び結果

４章で触れたように、磁場に貫かれたガスや回転しているガスは、幾何学的に薄い円盤として相似的に進化する。しかし、その相似解は、厳密に得られていない。つまり、 Narita et al. (1984) は、数値計算による密度分布をまねた関数を密度分布だとして相似解を導いたのであり、方程式が満たすべき特異点を通っていない。また、Nakamura et al.(1995) は重力場を薄い円盤のポアソン方程式ではなくて球対称重力場だと近似して相似解を導いた。

このような近似的な解では、定量的に種々の物理量を議論することができない。我々は、 Rumaway collapse 期について進化と構造を定量的に議論するために、反復法を使って数値的な厳密解を導いた。

５・１節で平衡解を示す。

５・２節で Runaway Collapse 期の相似解の性質を解析的に調べる。

５・３節で Runaway Collapse 期の相似解を数値的に得る方法及び結果を示す。

５・４節でその相似解の安定性の研究の方法を述べる。

５・５節で、 Inside-out Collapse 期の相似解を近似的に導く。

5.1　平衡解

相似方程式の解として解析的に得られるものがある。平衡状態の解もその１つである。平衡状態を $\xi = 0$ の条件のもとに導く。方程式 (4.51) ~ (4.55) およびポアソン方程式 (4.55) はこのとき

$$x\frac{d\sigma}{dx} + \sigma = 0, \tag{5.1}$$

$$\frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma}{dx} + \gamma - \frac{\omega^2 m^2}{x^3} = 0, \tag{5.2}$$

$$m = \sigma x^2, \tag{5.3}$$

$$\gamma = \int_0^\infty \int_0^\infty J_1(kx)J_0(kx')\sigma(x')x'kdkdx', \tag{5.4}$$

となる。 (5.1) を解くと定数 C を使って

$$\sigma(x) = \frac{C}{x}, \tag{5.5}$$

と表せる。ポアソン方程式にこの σ を代入して Bessel 関数の積分 $\int_0^\infty J_\nu(ax)dx = \frac{1}{a}$ を使えば

$$\gamma(x) = \frac{C}{x} \tag{5.6}$$

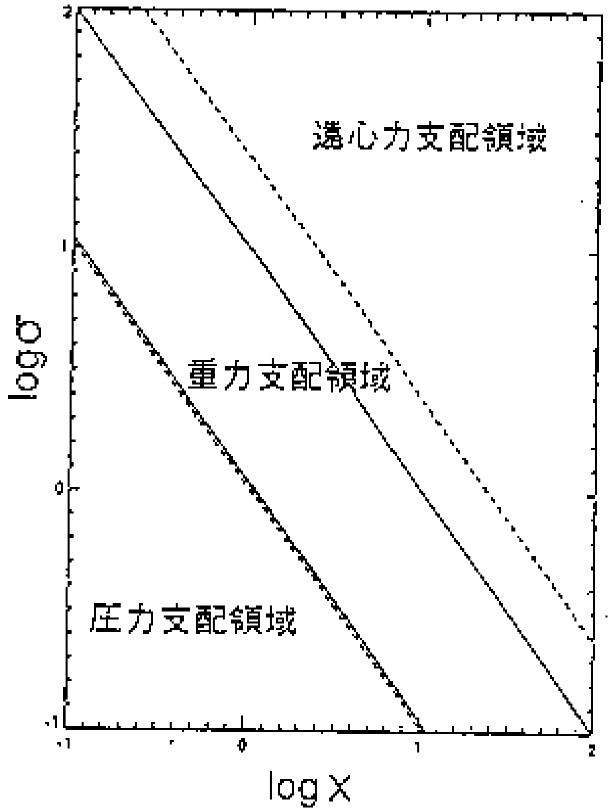


図 5.1: 相似方程式系の平衡解。縦軸が面密度、横軸は、半径 x。実線が $\omega = 0.3$、点線が $\omega = 0.2$ に対する平衡解。それぞれ、 2 つ平衡解を持つ。

となる。よって、式 (5.2) は

$$-1 + C - \omega^2 C^2 = 0, \tag{5.7}$$

となる。結局、平衡解は、

$$\begin{aligned} \omega = 0 \text{ の場合、} \quad & \sigma = \frac{1}{x}, \\ \omega \neq 0 \text{ の場合、} \quad & \sigma(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\omega^2}}{2\omega^2} \frac{1}{x}, \end{aligned} \tag{5.8}$$

となる。

$\omega \neq 0$ の場合、２つ解がある。図 5.1 に平衡解の面密度分布を表した。破線が $\omega = 0.2$、実線が $\omega = 0.3$ の解である。図中に示したように、２つの平衡解が境界となに支配的な力の領域が分かれている。式 (5.7) は、第一項が圧力、第二項が重力、第三項が遠心力を表していることより理解できる。ちょうど、力が釣り合っているのが平衡解である。$\omega > 0.5$ のとき、主に遠心力による外向きの力の方が内向きの重力より大きくなり、平衡解が存在しなくなる。

5.2 Runaway Collapse 期の相似解の性質

5.2.1 遷音速点

相似方程式系 (4.54) ~ (4.57) は、球対称の場合と同様に、特異面を持つ。運動方程式 (4.56) は、$x = 0$ もしくは $x - \xi = \pm 1$ で右辺の分母がゼロとなり特異となっている。解が発散しないための条件は式 (4.56) と (4.57) より、

$$x = 0 \quad \text{において、} \quad \xi = 0, \tag{5.9}$$

$$x - \xi = \pm 1 \quad \text{において、} \quad 1 - x\gamma + \omega^2\sigma^2 = 0, \tag{5.10}$$

である。この特異面での条件により解が限定される。

$x = \xi + 1$ は、球対称のときと同様の議論により相似座標から見て遷音速点にあたる。$x = \xi - 1$ は、相似座標から見て内向きの速度が音速を越える点である。

5.2.2 近似相似解の導出及び漸近的な性質

重力収縮を表す相似解は、非線形な積分微分方程式である。その解を本論文では数値的に得た。一方、近似をすることで簡単な解析形で解の性質を表すことは、基本的な構造を探る上で重要である。よって、近似解の導出及びテーラー展開による漸近的な性質の研究によって相似解の性質を調べた。

(1) 面密度分布の関数形を $\sigma(x) = \dfrac{a}{\sqrt{b^2 + x^2}}$ と仮定して、パラメータ a, b を方程式が $x \gg 1$ と $x \ll 1$ の領域で成立するように決める。この面密度の関数系は、Narita et al.(1984) が数値シミュレーションの結果を使いて決めたものと同一である。彼らは、中心付近での解への収束の条件からパラメータ a, b を決めた。本研究では、これを拡張する。

まず、面密度分布から落下速度 ξ、重力加速度 γ、内部質量 m を導いた。運動方程式を除く３つの相似方程式 (4.54) ~ (4.55) より

$$m(x) = a(\sqrt{b + x^2} - b), \tag{5.11}$$

$$\gamma(x) = \frac{a_i}{x}\left(1 - \frac{b_i}{\sqrt{b_i^2 + x^2}}\right), \tag{5.12}$$

$$\xi = \frac{\sigma x^2 - m}{\sigma x}, \tag{5.13}$$

と書けて、すべての変数が $a,\, b$ を使って表現できた。

これらの変数を運動方程式 (4.56) に代入した。そして、テーラー展開により運動方程式をよりよく満たすパラメータ $a,\, b$ を探した。 $D \equiv \sqrt{b^2 + x^2}$ とおくと

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{a}{xD^3}\left[(D^4 - 2bD^3 + b^2D^2) - x^2\right] & (5.14)\\ &\quad -\frac{a}{xD}\left[\frac{D^4 - 2bD^3 + b^2D^2}{x^2} - a - a\frac{b}{D} + \frac{\omega^2 a^2}{x^2}(D^2 - 2bD + b^2)\right] & (5.15) \end{aligned}$$

となった。これを $x \ll 1$ でテーラー展開をすると、

$$F(x) = \left(-\tfrac{a}{4b} - \tfrac{\omega^2 a^3}{4b^3} + \tfrac{a^2}{2b^3} - \tfrac{a}{b^3}\right)x + \left(\tfrac{a}{4b^3} + \tfrac{\omega^2 a^3}{4b^5} - \tfrac{5a^2}{8b^5} + \tfrac{3a}{2b^5}\right)x^3 + \ldots \tag{5.16}$$

$x \gg 1$ でのテーラー展開をすると、

$$\begin{aligned} F(x) &= (-2ab^2 - \omega^2 a^3 + ab^2 + a^2 - a)x^{-2} + (2ab^3 + 2\omega^2 a^3 b - a^2 b)x^{-3}\\ &\quad +(-ab^4 - \tfrac{1}{2}\omega^2 a^3 b^2 - \tfrac{1}{2}ab^4 - \tfrac{1}{2}a^2b^2 - \omega^2 a^3 b^2 + \tfrac{3}{2}ab^2)x^{-4} + \ldots \qquad (5.17) \end{aligned}$$

となった。この $F(x)$ が小さいほど、本当の解への収束性がよい。この $F(x)$ の性質を使うと極値での収束性に対して a, b を決めることができる。

$x \ll 1$ について誤差が小さい解を知りたいなら、 (5.16) の x と x^3 の前の係数がゼロであればよい。この条件から

$$(a,\, b) = (4,\, 2\sqrt{1 - 4\omega^2}), \tag{5.18}$$

となった。 $x \ll 1$ と $x \gg 1$ の両方で解に収束するものは (5.16) の x の項と (5.17) の x^{-2} の項の係数がゼロとして

$$(a,\, b) = (3,\, \sqrt{2 - 9\omega^2}), \tag{5.19}$$

となった。これは、 Narita et al.(1984) の得た近似解と同一である。また、 $x \gg 1$ でよく解に収束するものは (5.17) の x^{-2} と x^{-3} の項の係数がゼロとして

$$(a,\, b) = (2,\, \sqrt{1 - 4\omega^2}), \tag{5.20}$$

であった。

(2) 球対称重力場で近似[§]して漸近的な性質を調べた。

薄い円盤の重力を計算するポアソン方程式 (4.55) があるために相似方程式系 (4.56) ~ (4.55) は、テーラー展開できない。よって、薄い円盤の重力を球対称重力場で近似した。球対称重力場で近似した相似方程式系は、 (5.52) ~ (5.54) となる。この式をテーラー展開すると、

$x \ll 1$ の場合、

$$\xi = \frac{1}{2}x - \frac{\sigma_0}{12}x^2 + \mathcal{O}(x^3) \tag{5.21}$$

$$\sigma = \sigma_0 - \frac{\sigma_0^2}{2}x + \frac{3\sigma_0 + (5+3\omega)\sigma_0^2}{24}x^2 + \mathcal{O}(x^3) \tag{5.22}$$

$x \gg 1$ の場合、

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_\infty + \frac{1 - A_+ - \omega^2 A_+^2}{x} + \frac{\xi_\infty}{2x^2} \\ &\quad + \frac{2\xi_\infty^2 + (A_+ - 1)(A_+ - 4) + \omega^2 A_+^2 (A_+ - 6 - 2\omega^2 A_+^2)}{6x^3} + \mathcal{O}(x^{-4}), \end{aligned} \tag{5.23}$$

$$\sigma = \frac{A_+}{x} - \frac{A_+(A_+ - 1 - \omega^2 A_+)}{2x^3} + \mathcal{O}(x^{-5}), \tag{5.24}$$

となる。よって、回転するガス円盤のモデルの場合の Runaway Collapse 期の漸近的な解の性質は、 σ_0、 ξ_∞、 A_+ 及びパラメータ ω で表せる。ここで注意しなければならないのは、 σ_0、 ξ_∞、 A_+ の値自体が ω の関数であることである。

[§]回転のないガス円盤に対しての球対称重力場近似での漸近的解の性質は、 Nakamura et al.(1995) が調べている。

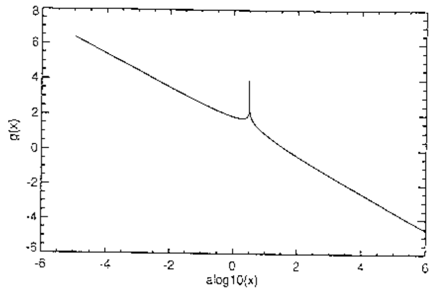


図 5.2: 解とのずれのための評価関数に付けた重み関数 g(x) の x に対する分布。図は、 $\omega = 0.3$ に対するもので、半径が小さいほど重み関数が大きくなっている。 $x \simeq 1$ にあるピークは、遷音速点である。この部分での重みを大きくしてのは、解のこれらの領域での振る舞いが解全体に大きく影響すると思われるからである。

5.3 半解析的方法による Runaway Collapse 期の相似解の導出

前節では、漸近的な解の性質を調べた。この節では、厳密解を導く。しかし、相似方程式系は薄い円盤の重力場を解くために、非線形な積分微分方程式となっている。このため、我々は、中心星星形成前 (Runaway Collapse 期) の相似解を得るために数値的な反復法を用いた。ここでは、我々が行った解析方法について説明する。

5.3.1 評価関数

４つの相似方程式 (4.56) ~ (4.55) は、独立な変数として、面密度 $\sigma(x)$、落下速度 $\xi(x)$、半径の内の内部質量 $m(x)$、重力加速度 $\gamma(x)$ の４つを持ち、ちょうど閉じている。よって、適当な密度分布を外から与えると、運動方程式 (4.56) 以外の式を使ってすべての変数の空間分布が表される。これを運動方程式に代入することで、与えた密度分布の解とのずれの空間分布を調べることができる。

つまり、ある半径 x において $F(x) > 0$ なら内向きの力がそこで過剰となっている。逆に $F(x) < 0$ なら外向きの力が過剰となっている。厳密に相似解となっているときには、すべての x で $F(x) = 0$ となっているはずである。

我々は、このようなすべての x で $F(x) =$（実際には、数値誤差の範囲で）0 を与えるような密度分布を、半解析的に数値的手段を使って探した。そのときに、解への収束性を評価をするための量が必要であるので、重み $g(x)$ を使って、評価関数

$$R \equiv \int_{x_{min}}^{x_{max}} g(x) F(x)^2 dx, \tag{5.25}$$

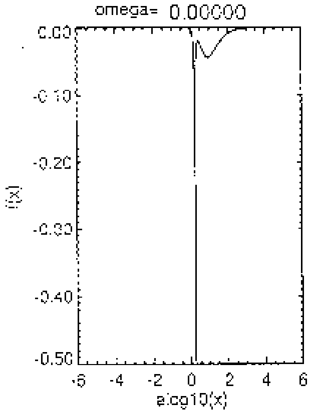


図 5.3: Narita et al.(1984) の近似解での F(x)。これにより、 Narita et al.(1984) の近似解を評価すると $R = 2.19$ であった。

を定義した。 x_{mix} と x_{man} は、それぞれ数値計算で用いた、 x の最小と最大の値である。本研究では、 $x_{mix} = 10^{-4}$ と $x_{man} = 10^{6}$ とした。我々は、特に特異点付近及び半径が小さい場所での解の振る舞いに興味がある。重み関数を、これらの場所で大きくなるような

$$g(x) = \frac{55.5551}{x\sqrt{|logx - 0.5|}} \frac{[(\xi - x)^2 - 1]^2 + 1}{[(\xi - x)^2 - 1]^2 + 0.2}, \tag{5.26}$$

とした。この関数の形は、図 5.2 に表してある。

我々の解以外の評価関数 R の例として、図 5.3 に $N = 1$ でパラメータを

$$(a_1, b_1) = (4, 2), \tag{5.27}$$

としたときの $F(x)$ の分布をに表した。これは、 Narita et al. (1984) の近似的な解と同じである (詳しくは、 4.2.5 節を参照)。この場合、 $|F(x)|$ の最大は 0.5 となっており、評価関数 $R = 2.189$ であった。これに比べて、私たちの求めた解の $R \sim 10^{-7}$ は極めて小さく現実的には厳密解と考えて差し遣いない。

5.3.2 反復法による相似解の導出

我々は、数値的な反復法でいろいろな回転に対する解を求めた。反復法は以下のような手順で構成される・

(i) 面密度分布を適当におく。

(ii) その面密度分布から、落下速度分布などその他の変数分布を計算する。そして、運動方程式 $F(x)$ に代入する。
(iii) 面密度分布に摂動を加え、 $F(x)$ の変化を調べる。
(iv) 摂動による $F(x)$ の変化から R が極小となる密度分布を予想する。
(v) 面密度分布を予想にもとずいて修正する。
(vi)(ii) ~ (iv) を繰り返し、 R が数値誤差による限界である $\sim 10^{-7}$ 程度を与える面密度分布を探した。
以下に、我々の行った手順を具体的に説明する。

(i) 我々は、面密度分布をある定数 $a_i, b_i\,[i=1,2,\cdots,N]$ を使って

$$\sigma(x)=\sum_{i=1}^{N}\frac{a_i}{\sqrt{b_i^2+x^2}}, \tag{5.28}$$

と表現した。これは、 5.2.3 節で解の性質を調べるために使った面密度分布の関数の重ね合わせである。この関数形は、相次解に似ているうえ、都合よく積分できる。

(ii) 運動方程式を除く 3 つの相似方程式 (4.54) ~ (4.55) より

$$m(x)=\sum_{i=1}^{N}\left\{a_i(\sqrt{b_i^2+x^2}-b_i)\right\}, \tag{5.29}$$

$$\gamma(x)=\sum_{i=1}^{N}\left\{\frac{a_i}{x}(1-\frac{b_i}{\sqrt{b_i^2+x^2}})\right\}, \tag{5.30}$$

$$\xi=\frac{\sigma x^2-m}{\sigma x}, \tag{5.31}$$

と書けて、すべての変数が $a_i, b_i[i=1,2,\cdots,N]$ を使って表現できる。これらの変数を、運動方程式 $F(x)$(4.56) に代入し R を求めた。

(iii)$a_i\,[i=1,2,\cdots,N]$ に摂動を加えた。このとき、摂動を

$$[a_1+\epsilon_1, a_2, a_3, \cdots, a_N] \tag{5.32}$$

$$\vdots \tag{5.33}$$

$$[a_1, a_2, a_3, \cdots, a_N+\Delta\epsilon_N] \tag{5.34}$$

のように N 種類与えた。本研究では、 $\epsilon_i=10^{-3}$ とした。このような摂動を与えたパラメータを使って (ii) の方法で $F(x)$ を求めて、摂動を加えていない $F(x)$ との差を計算した。この差を $\delta F_j(x)$ とおき N 種類の摂動 $[j=1,2,\cdots,N]$ について得た。

(iv)R を極小にする $a_i[i=1,2,\cdots,N]$ までの変位を $\delta a_i[i=1,2,\cdots,N]$ とする。この δa_i を (iii) で得た $\delta F_j(x)$ をもとに予想した。これには、数値微分

$$\frac{\partial R}{\partial a_j} \equiv \frac{1}{\delta a_j}\left[R(a_1,\cdots,a_j+\delta a_j,\cdots,a_N) - R(a_1,\cdots,a_j,\cdots,a_N)\right], \tag{5.35}$$

を用いた。この $R(a_1,\cdots,a_j+\delta a_j,\cdots,a_N)$ を展開して数値微分が 0 となる R を与えるパラメータ δa_i を探した。しかし、 δa_j があまり大きいと線形予想の近似が大きくはずれる。これを防ぐために、重石として $\sum_k \left(\frac{\delta a_k}{\Delta_k}\right)^2$ をと加えて条件を、

$$\frac{1}{\delta a_j}\left[R(a_1,\cdots,a_j+\delta a_j,\cdots,a_N) - R(a_1,\cdots,a_j,\cdots,a_N) + \sum_k \left(\frac{\delta a_k}{\Delta_k}\right)^2\right] = 0, \tag{5.36}$$

とした。 R を展開すると

$$R\frac{\partial R}{\partial a_j} + \left(\frac{\partial R}{\partial a_k}\right)^2 \delta a_k + \frac{1}{\Delta_j}\frac{\delta a_k}{\Delta_k} = 0, \tag{5.37}$$

となった。これは、行列形で書くと

$$\left[\quad -\left(\frac{\partial R}{\partial a_k}\right)^2 - \frac{1}{\Delta_j \Delta_k} \quad\right]\left(\quad \delta a_k \quad\right) = \left(\quad R\frac{\partial R}{\partial a_j} \quad\right)$$

と表される。この逆行列を計算して δa_k を得た。

しかし、方程式が非線形なので、線形予想による修正を密度分布に加えても実際は Res は、極小となっていない。よって、(vi) 線形予想を修正として $a_i, b_i[i=1,2,\cdots,N]$ に与える。そして、この作業を繰り返えすことで Res の極小を探した。その反復は、プログラムにより自動化した。

図 5.4 にこの反復法の概略を表した。そのとき、局所的な極小にはまるのを避けるために摂動の与え方、密度分布の重ね合わせの数 N は、何通りかについて試した。

我々は、 $N = 5, 10, 15, 20, 24, 27$ について計算した。この N を増やすと R の収束値も小さくなっていった。 $N = 20$ としたところで R が数値誤差の範囲つまり $R \sim 10^{-7}$ となるような密度分布を得ることができた。 N をこれ以上増やしても R はこれ以上、下がらなかった。この、 $R \sim 10^{-7}$ というのは、数値的に厳密な相似解である。このときの —F(x)— の最大値は、 $\sim 5 \times 10^{-5}$ であった。同様な解析を、いろ

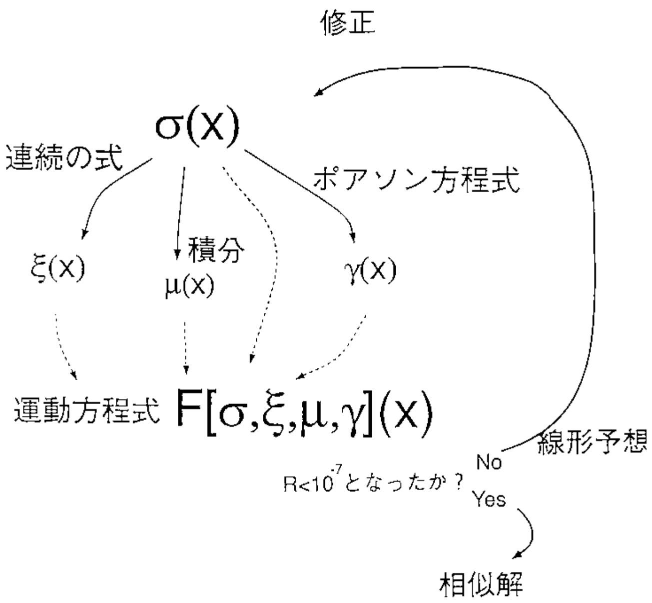


図 5.4: 我々が Runaway Collapse 期の相似解導出のために用いた反復法の概念図。

いろな回転の強さを表すパラメータ ω についても行った。しかし、 ω が 0.5 を越えるものについては、 $R < 10^{-6}$ とする事ができなかった。

数値的反復法では、 $R \sim 10^{-7}$ において、そのパラメータ $a_i[i = 1, 2, \cdots, 20]$ は微少振動を始めた。解はこの微少振動の中心のパラメータをとることで得た。結局、本研究では、評価関数 $Res \sim 10^{-7}$ を与える面密度分布を $\omega < 0.5$ について得た。

5.3.3 結果： Runaway Collapse 期の相似解

反復法の結果、我々は、いろいろな回転パラメータ ω について数値誤差の範囲で厳密な RUnawayCollapse 期の相似解を得た。図 5.5 ~ 図 5.8 に得られた相似解を示す。

図 5.5 は、いろいろな回転パラメータ ω に対する相似解の面密度分布 $\sigma(x)$ である。図中の数字は、 ω である。面密度分布は、いずれの回転の場合でも中心付近でほぼ一定値となっている。一方中心から遠く離れると半径に反比例して減少している。この性質は、 $x \simeq 1$ で切り替わっている。また、回転が強くなると（ω が大きくなると）中心面密度が大きくなっている。

図 5.6 に示したように落下速度分布は、中心付近では半径に比例して増加している。中心から遠く離れると、ある値に収束していく。図中の縦の実線は、落下度の遷音速点を表しており、この線を横切るとき方程式が特異となる。我々の得たこの相似解は、この特異面を条件 (5.9) と (5.10) を満たしながら滑らかに通過している。

図 5.7 にいろいろな回転パラメータ ω に対する半径 x 内の内部質量の分布を表した。回転速度分布の、中心付近では半径に比例して増加し中心から離れるとある値に収束する

さらに、回転速度 v_φ についても得ることができる。回転速度 v_φ は、関係式 (4.42) より相似変数にするとき時間依存の項は付かない。よって、相似変数での回転速度を無次元変数として

$$\xi_\varphi = \frac{v_\varphi}{c_s}, \tag{5.38}$$

と書ける。また、単位質量当たりの角運動量と内部質量には、パラメータ ω を含む式 (4.49)： $j = \omega \frac{G}{c_s} M$ の関係がある。よって、回転速度 v_φ は

$$v_\varphi = \omega \frac{G}{c_s} \frac{M}{r}, \tag{5.39}$$

と表される。これを、相似変数で書き直せば、

$$\xi_\varphi = \omega \frac{m}{x^2}, \tag{5.40}$$

となる。図 5.8 にいろいろな回転パラメータ ω に対する回転速度の分布を表した。回転速度分布の、中心付近では半径に比例して増加し中心から離れるとある値に収束する中心付近の性質は、 $\xi_\varphi = \omega \frac{m}{x}$ と中心付近で面密度が一定となることにより導ける。つまり、中心付近で $m \simeq \int_0^x \sigma_0 x dx$ と表せるので

$$\xi_\varphi = \frac{\omega \sigma_0}{2} x, \tag{5.41}$$

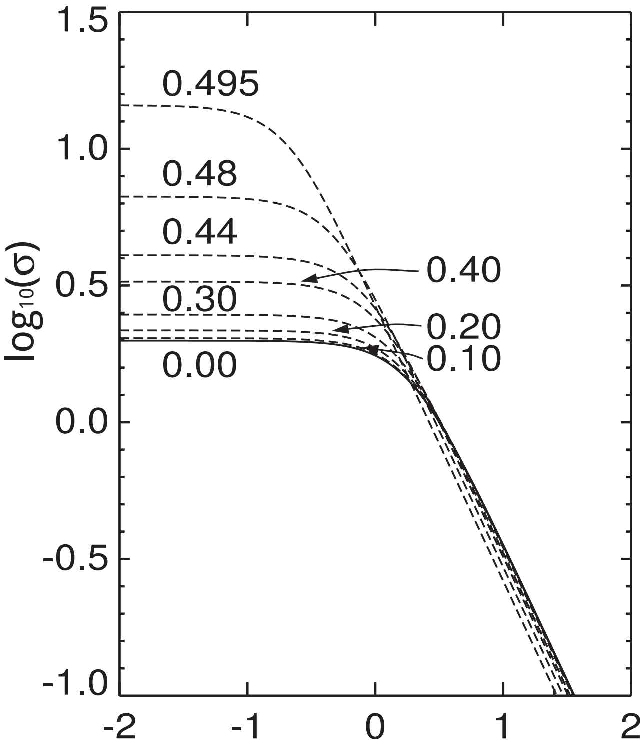


図 5.5: Runaway Collapse 期における面密度分布。いろいろな強さの回転についての相似解をまとめて表してある。図中の数字は、回転パラメータ ω である。

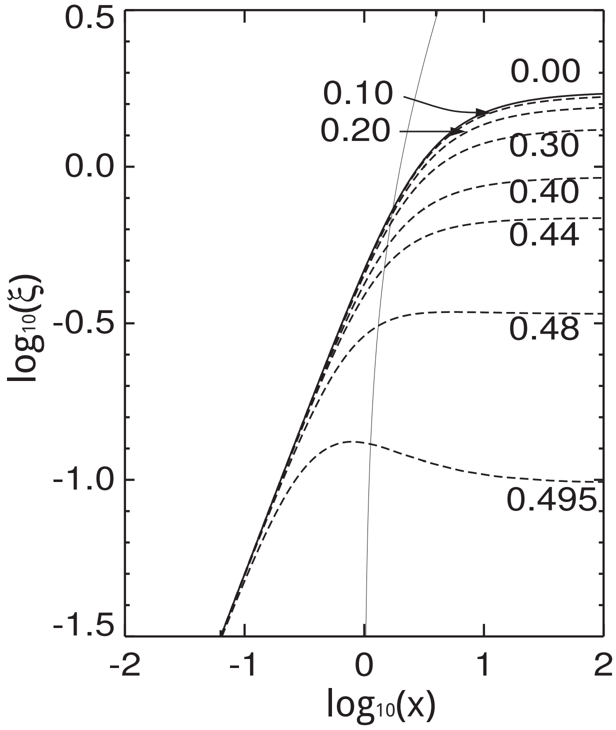


図 5.6: R いろいろな強さの回転についての Runaway Collapse 期における落下度分布。図中の数字は、回転パラメータ ω。図中の縦の実線は、落下度の遷音速点。

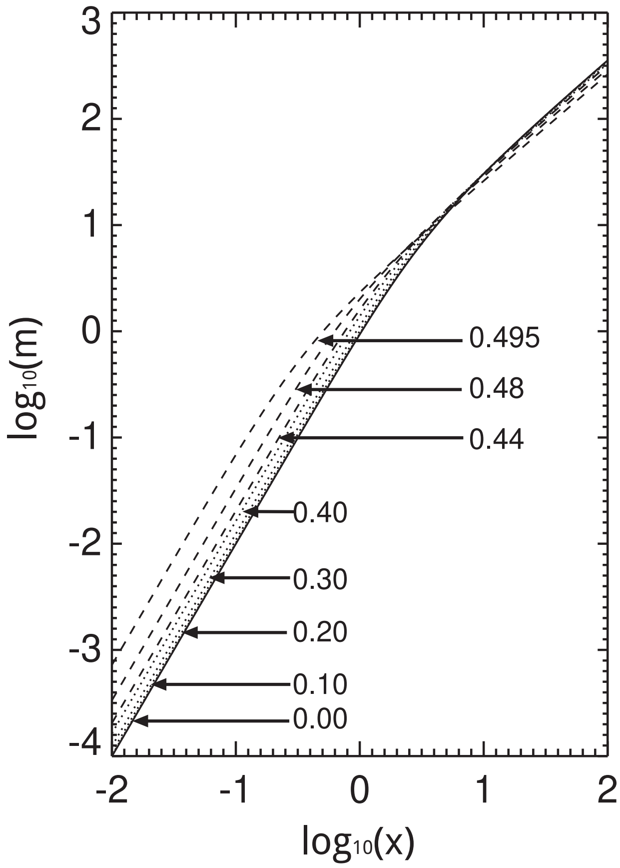


図 5.7: R いろいろな強さの回転についての Runaway Collapse 期における内部質量の分布。図中の数字は、回転パラメータ ω。

となり、半径に比例している。同様に、中心から離れた所で一定となる性質も $m \simeq \int_0^x B_+ dx$ より

$$\xi_\varphi = \omega A_+, \tag{5.42}$$

となることで説明できる。

以上のような我々の得た相似解に対する $F(x)$ の分布は、図 5.9(a) ~ 図 5.9(d) に表した。それぞれの図中に、評価関数 R の値についても表した。その面密度分布を与えるパラメータ $a_i, b_i[i = 1, 2, \cdots, 20]$ は、付録 A に示した。このパラメータ $a_i, b_i[i = 1, 2, \cdots, 20]$ により式 (5.28) ~ 式 (5.31) を使って、面密度分布などの相似解を表現できる。

図 5.10 に $\omega = 0.0$ について、得られた相似解と過去に得られた近似解を ξ の分布

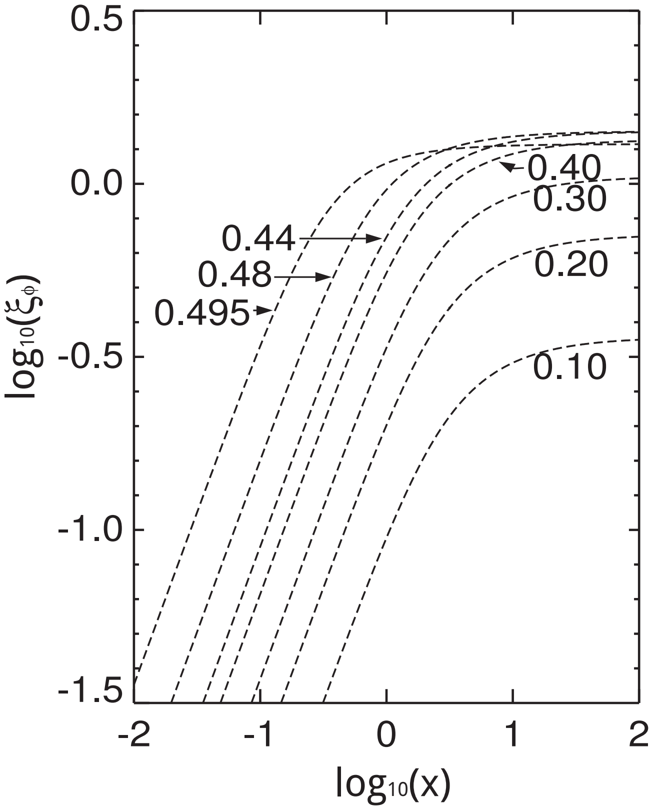


図 5.8: R いろいろな強さの回転についての Runaway Collapse 期における回転速度分布。図中の数字は、回転パラメータ ω。

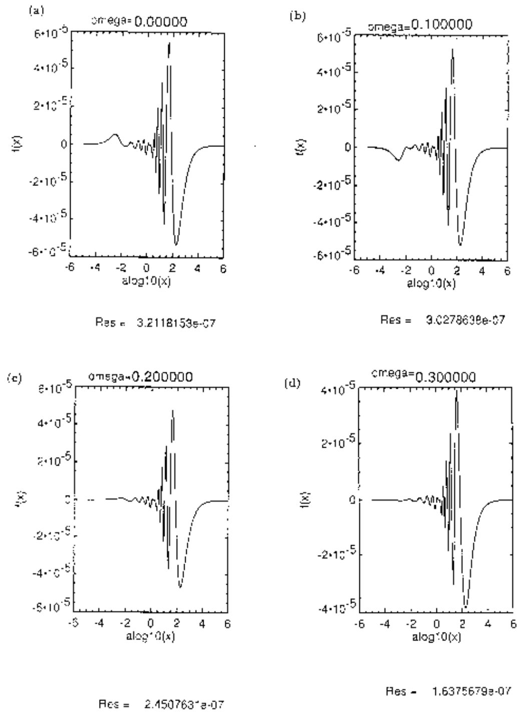


図 5.9: N=20 としたときの反復法の結果、我々が得た Runaway Collapse 期の相似解の誤差（F(x) で表現してある）。そのときの評価関数 R の値は、図の下に Res と表現してあるもの。図はいろいろな回転に対してのもので、(a)$\omega = 0.00$(b)0.10(c)0.20(d)0.30 の回転パラメータに対するもの。

で比較した。これによると、中心付近については Narita et al.(1984)、Nakamura et al.(1995) もよく合っている。しかし、$x \simeq 1$ より遠方では、過去のどちらの研究もずれが大きくなっている。

回転の強さに対する解の振る舞いをより詳しく調べるために、ω 依存性を図 5.11 に示した。図 5.11(c) によると、$\omega \simeq 0.5$ で落下速度が 0 に漸近していくのがわかる。これは、5.2 節の平衡解の議論で $\omega > 0.5$ のとき、主に遠心力による外向きの力の方が重力より大きくなり、平衡解が存在しなくなったことに対応している。つまり、$\omega > 0.5$ では、相似解は存在しない。図 5.11(a) に σ_0 と ω の関係を表した。これによると回転が大きくなると、中心付近の密度が著しく上昇している。これより、重力加速度が増加して、遠心力の増加を埋め合わせている。重力加速度が増加は、図 6.4(b)、図 6.5(b) に示してある。図 6.4(b)、図 6.5(b) の点線がそれぞれ $\omega = 0.0$ と $\omega = 0.3$ の重力加速度である。

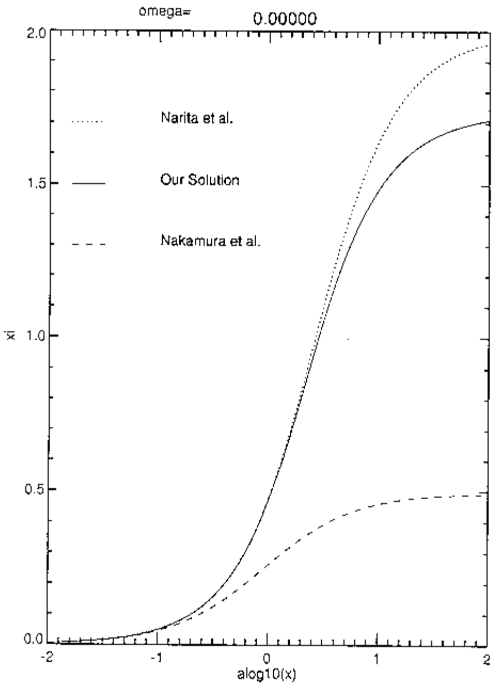


図 5.10: 我々の得た RUnaway Collapse 期の相似解と今までに得られていた近似的な相似解の比較。点線が Narita et al.(1984)、破線が Nakamura et al.(1995) の近似解。

性質を定量的に調べるために、得られた相似解から漸近形を決める値を導いた。この値とは、中心での面密度 σ_0、無限遠での面密度分布 x^{-1} の係数 A_+ 及び、無限遠での落下速度の収束値 ξ_∞ である。値は、回転パラメータ ω に依存する。得られた相似解から幾つかの ω に対してこの定数の値を得た。この値を、表５・１に表した。

表 $5 \cdot 1$ いろいろな ω に対する漸近的な定数

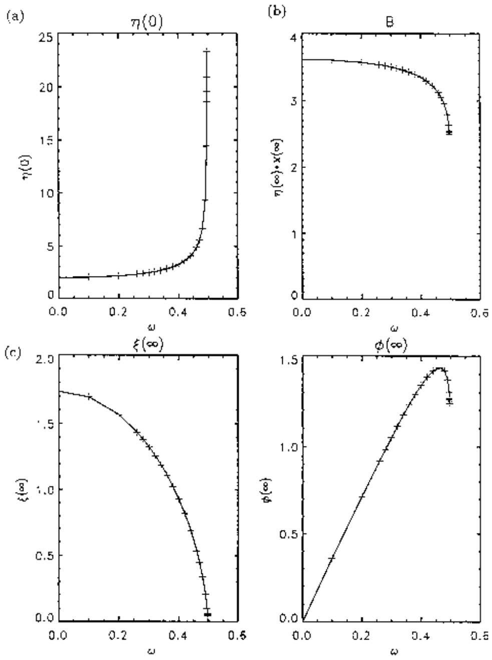


図 5.11: 我々の得た RUnaway Collapse 期の相似解の ω 依存性。それぞれ、(a) 中心の面密度 σ_0(b) 面密度 $\propto \frac{1}{x}$ の係数 A_+(c) 落下速度の収束値 ξ_∞ (d) 回転速度の収束値 ϕ_∞

ω	σ_0	A_+	ξ_∞	遷音速点
0.000	1.9888	3.6135	1.7362	1.7303
0.100	2.0292	3.6040	1.6945	1.7238
0.200	2.1667	3.5720	1.5643	1.7023
0.300	2.4747	3.5038	1.3265	1.6568
0.400	3.2680	3.3507	0.9274	1.5565
0.440	4.0805	3.2241	0.6877	1.4755
0.480	6.6875	2.9543	0.3386	1.3104
0.495	14.4278	2.6313	0.0982	1.1300

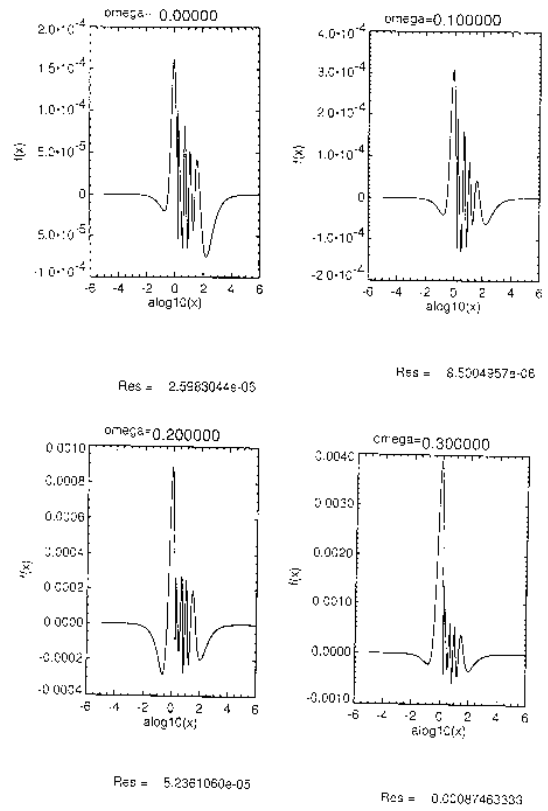


図 5.12: N=10 で得た相似解に対する F(x) の分布。図は、いろいろな回転の強さについてのもの。

5.3.4 誤差の見積もり

$|F(x)|$ に対する相似解の収束性によって誤差を見積もることができる。密度分布関数の重ね合わせの数 N を増やしていくと R や $|F(x)|$ が減少していった。図 5.12(a) に $N=10$ 場合についての $F(x)$ の分布を表した。$|F(x)|$ の最大は、$\omega=0.0$ で $\sim 2\times10^{-4}$ である。これは、$N=20$ の場合の約 30 倍である。このときの解 $\sigma'(x), \xi'(x)$ と $N=20$ での解の差は、図 5.13 に表したように $\sim 3\times10^{-3}$。誤差を $F(x)$ の大きさに比例すると考えると、結局、$\sigma(x), \xi(x)$ の誤差（数値誤差）は $\sim 10^{-4}$ と見積もられる。

$\omega=0.30$ のときは、図 5.9(d) と図 5.12(d) より $|F(x)|$ はほぼ 100 倍である。このときの解 $\sigma(x), \xi(x)$ の差は、図 5.13(b) より $\sim 4\times10^{-2}$ なので、結局 $\omega=0.30$ での誤差は、$\sim 4\times10^{-4}$ と見積もられる。

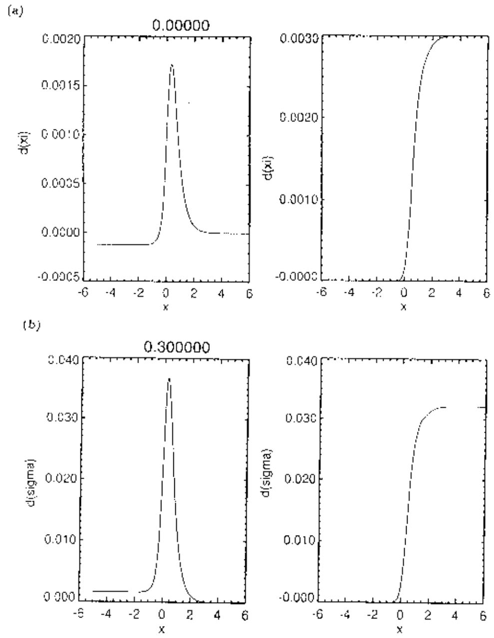


図 5.13: N=20 と N=10 の相似解の差をとったもの。面密度、速度、の差の分布で (a)$\omega = 0.0$(b)$\omega = 0.30$ の場合。

同様にその他の ω について調べても誤差は 10^{-3} から 10^{-4} であった。

5.3.5 密度分布の波数分解による解析

この解は特別な関数形 ($\dfrac{1}{\sqrt{b_i^2 + x^2}}$) を基底にとった関数の重ね合わせとなっている。このために、得られた相似解が特別に選ぶれればれた解ではないか？との疑問がわく。我々は、この疑問に答えるように密度分布を波の重ね合わせで与えた。つまり、 Res の極小を与える、波数空間 (k) での分布を探した。これにより、より一般的に相似解について議論できる。

密度分布を Bessel 関数を使い波数 k に分解すると

$$\tilde{\sigma}(k) = \int_0^\infty x J_0(kx) \sigma(x) dx, \tag{5.43}$$

となる。このとき、 Hankel 変換、連続の式、ポアソン方程式と Bessel 関数の関係式

により、すべての変数は $\tilde{\sigma}(k)$ によって表されて

$$\sigma(x) = \int_0^\infty kJ_0(kx)\tilde{\sigma}(k)dk, \tag{5.44}$$

$$m(x) = \int_0^\infty xJ_1(kx)\tilde{\sigma}(k)dk, \tag{5.45}$$

$$\gamma(x) = \int_0^\infty kJ_1(kx)\tilde{\sigma}(k)dk, \tag{5.46}$$

$$\xi = \frac{\sigma x^2 - m}{\sigma x}, \tag{5.47}$$

となる。このように、 $\tilde{\sigma}(k)$ によってすべての変数が導出できる。 $\tilde{\sigma}(k)$ を離散的なパラメータで表せたら、前節と同様の解析により、数値的に相似解を導くことができる。我々は、特別な関数形は基底として持ち込むのを避けた。つまり、 $\tilde{\sigma}(k)$ を離散的なポイントを 3 次関数でスプライン補間することで表した。

このとき、 $\tilde{\sigma}(k)$ の性質を見るために、前節 (5.27) で表される Narita et al. (1984) の近似的な解について調べてみると、

$$\tilde{\sigma}(k) = \int_0^\infty xJ_0(kx)\left(\frac{4}{\sqrt{4+x^2}}\right)dx = \frac{4e^{-2k}}{k}, \tag{5.48}$$

となる。よって、

$$\tilde{\sigma}'(k) \equiv ln\left(k\tilde{\sigma}(k)\right) = -2k + ln4, \tag{5.49}$$

変数 $\tilde{\sigma}'(k)$ を上式のように定義すると 1 次関数となる。

3 次関数で内挿するにあたり、このような 1 次関数に近い分布の方が自然なので $(k_i, \tilde{\sigma}'_i)[i = 1, 2, \cdots, 38]$ を離散的なポイントとして選んだ。この $\tilde{\sigma}'_i$ に摂動を加え、極小を与えるものを線形予想した。そして、この作業の反復により解を探した。この反復法は、基本的には前節の方法と同じである。

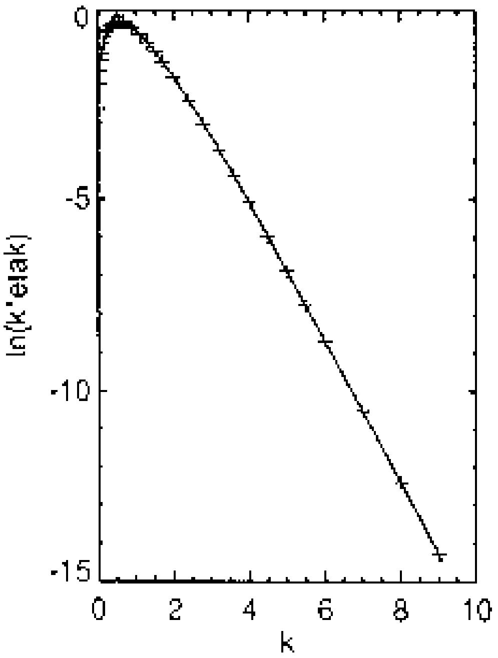


図 5.14: $\omega = 0.0$ のときに得た k 空間での解。縦軸が $\tilde{\sigma}'(k)$ である。計算で摂動を与えた離散的なポイントは、図中に'+'でマークしてある。

5.3.6　密度分布の波数分解による解析の結果

数値的反復法では、最終的にそのパラメータ $(k_i, \tilde{\sigma}'_i)[i = 1, 2, \cdots, 38]$ は微小振動を始めた。解はほぼこの微小振動の中心のときのパラメータをとって得た。図 5.14 に $\omega = 0.0$ について、この時の k 空間での $\tilde{\sigma}'_i$ の分布を表した。図中のプラスのマークが、パラメータ $(k_i, \tilde{\sigma}'_i)[i = 1, 2, \cdots, 38]$ である。実線は、これをもとに、3 次関数でスプライン補間したものである。

図 5.15(a),(b) に $\omega = 0$ について、得られた解 $\sigma(x), \xi(x)$ を表した。また、図 5.15(c) にそのときの $F(x)$ を表した。この $F(x)$ は、密度分布のモデルの重ね合わせによる方法と比べて 10 倍大きい。これは、技術的な問題によってである。密度モデルの重ね合わせの方法では、パラメータから速度などの変数を導くのにパラメータの数 N 回の計算であった。一方、波数分解の方法では、Bessel 関数による Hankel 変換により、波数空間で 0 から ∞ までの積分を行っている。この積分により計算回数が N に比べて非常に多くなる。図中の点線は、密度分布のモデルの重ね合わせによる方法で得られた値である。

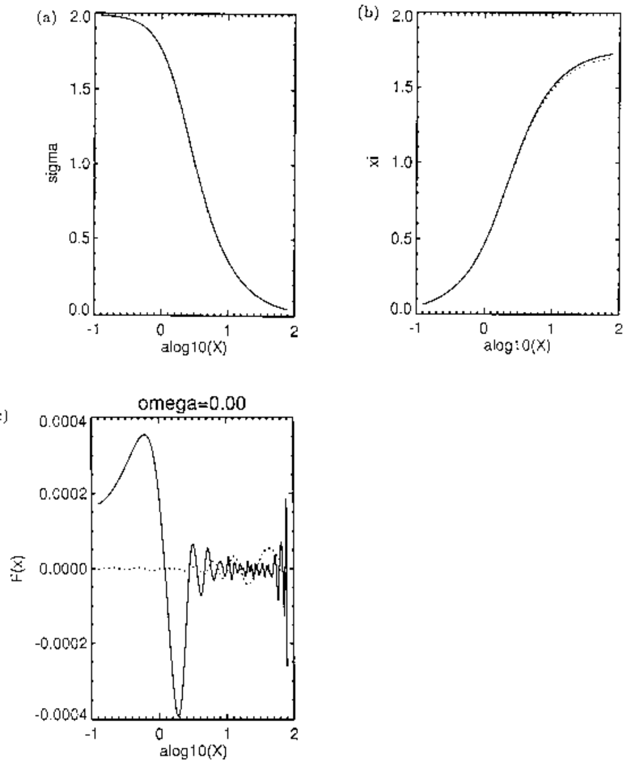


図 5.15: 波数分解による方法と密度モデルも重ね合わせで得た解の比較（$\omega = 0.0$）。実線が波数分解による方法で得た解。破線が密度モデルも重ね合わせで得た解。(a) 面密度、(b) 落下速度、(c)F(x) の分布をそれぞれ示してある。

この 2 つの別々の方法で得られた解の差をとると、図 5.16(a),(b) となる。このとき、新しく得られた解について誤差を調べる。$|F(x)|$ の最大は、$\sim 5 \times 10^{-4}$ であり、密度分布のモデルの重ね合わせでの値のほぼ 10 倍となっている。よって、このときの解 $\sigma(x), \xi(x)$ の誤差を見積もると 10^{-2} から 10^{-3} となる。つまり、密度分布のモデルの重ね合わせによる方法で得られた解と今回の波の重ね合わせによる方法での解の差は、誤差のオーダーである。つまり、この 2 つの方法による解は誤差の範囲で一致する。

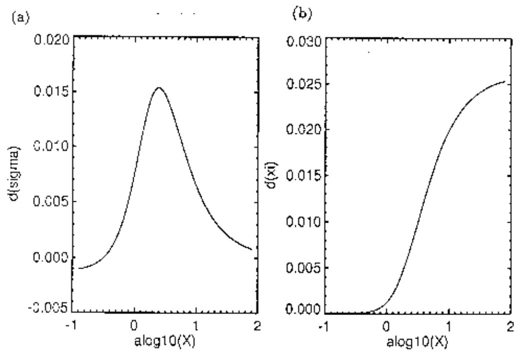


図 5.16: 波数分解による方法と密度モデルも重ね合わせで得た解の差をとったもの（$\omega = 0.0$）。(a) に面密度、(b) には落下速度の分布についての差を示してある。

5.4 Inside-out Collapse 期の近似的相似解

Runaway Collapse 期の相似解が得られたので、これに続く Inside-out Collapse 期の初期条件が得られたことになる。ところが、Inside-out Collapse 期では、ガス円盤の中心で面密度が発散している。このため、Runaway Collapse 期の場合のような数値的に面密度分布の修正を繰り返す方法は使えない。本修士論文では円盤の重力場を球対称重力場で近似することで、問題を常微分方程式の積分とした。そして、いろいろな回転についての相似解を得た。以下に、その方法を説明する。

5.4.1 相似方程式及び積分方法

Inside-out Collapse 期については、中心て面密度が発散している。このため Runaway Collapse 期で使った方法は使えない。よって重力場を球対称で近似して考える。この近似が Runnaway Collapse 期の場合ほど悪い近似でないことは、6 章の議論で説明する。球対称重力場の場合、ポアソン方程式 (4.32) の代わりに

$$g_r = \frac{GM}{r^2}, \tag{5.50}$$

を使えばよい。この相似変数での表現は

$$\gamma = \frac{m}{x^2} \tag{5.51}$$

である。この γ と、相似方程式 (4.51) ~ (4.54) を整理すると、

$$\left\{(x-\xi)^2 - 1\right\}\frac{d\sigma}{dx} + \sigma\left[\frac{(x-\xi)^2}{x} - \frac{m}{x^2} + \frac{\omega^2 m^2}{x^3}\right] = 0, \tag{5.52}$$

$$\left\{(x-\xi)^2-1\right\}\frac{d\xi}{dx}+(\xi-x)\left[-\frac{1}{x}+\frac{m}{x^2}-\frac{\omega^2 m^2}{x^3}\right]=0, \tag{5.53}$$

$$m=-x\sigma(\xi-x), \tag{5.54}$$

となる。これは、パラメータ ω を持つ常微分方程式系であり、適当な初期値を決めれば、数値的に積分できる。Inside-out Collapse 期について解く場合は、$x<0$ の範囲で計算すればよい。これは、3 章の議論と同様に時刻 t が中心星形成時刻 t_0 より進むためである。我々は、積分をルンゲクッタ法により $x=-500$ から $x=0$ に向かって行った。積分は、遷音速点 $x=\xi-1$ もしくは中心 $x=0$ で方程式が特異となる x まで行った。

我々は、Runaway Collapse 期に引き続きおこる Inside-out Collapse 期を考える。このために、初期値を以下のように与えた。$x=-500$ では、解は十分にの漸近形

$$\xi=\xi_{-\infty}, \sigma=\frac{A_-}{x}, \tag{5.55}$$

で表される。よって、$x=-500$ での積分の初期値は、$\xi_{-\infty}$ と A_- の 2 つのパラメータで表される。

$-x\gg 1$ は、$t\to t_0$ である。このように、相似座標系においては、$-x\gg 1$ での相似解を与える $\xi_{-\infty}$ と A_- は Inside-out Collapse 期の初期状態を表す。初期状態は、中心で面密度が発散しており

$$\Sigma=\left(\frac{c_s^2}{2\pi G}\right)\frac{A_-}{r}, \tag{5.56}$$

$$v_r=-c_s\xi_{-\infty}, \tag{5.57}$$

と表される。一方、Runaway Collapse 期の最終状態は、

$$\Sigma=\left(\frac{c_s^2}{2\pi G}\right)\frac{A_+}{r}, \tag{5.58}$$

$$v_r=-c_s\xi_{\infty}, \tag{5.59}$$

である。よって、我々の得た Runaway Collapse 期の相似解の $x\gg 1$ での漸近解 ξ_∞ と A_+ を使って、$\xi_{-\infty}=\xi_\infty$ と $A_-=A_+$ とすれば、一続きの進化が追える。この、定数 ξ_∞ と A_+ は回転に依存する。表6・1にこの数値を示した。

このようにして、いろいろな回転パラメータ ω について、Inside-out Collapse 期の相似解を得た。

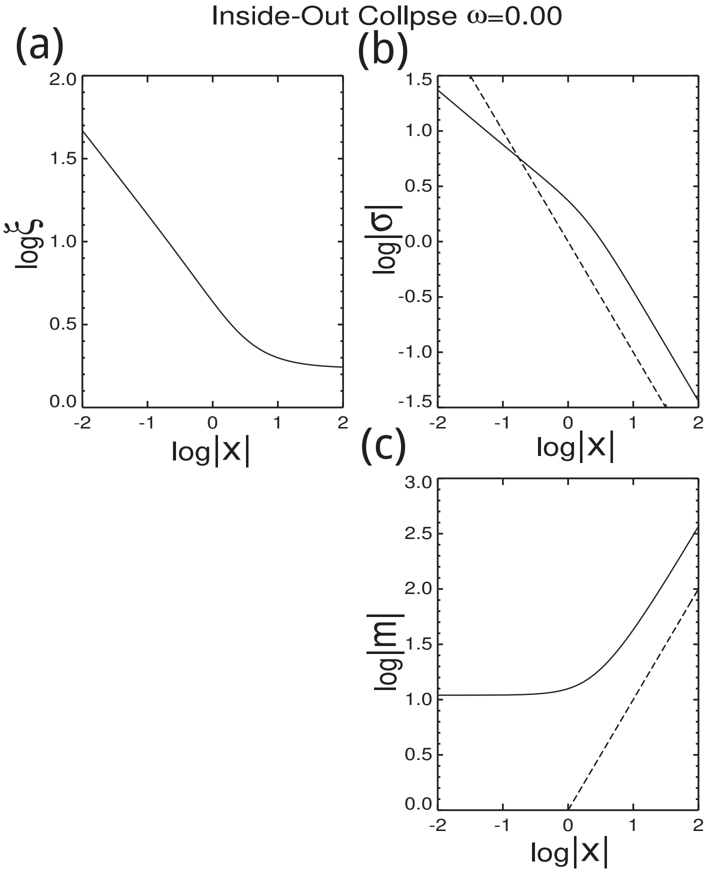


図 5.17: $\omega = 0.0$ についての、 Inside-Out Collapse 期の相似解。 (a) 落下速度、 (b) 面密度、 (c) 半径 x 内の内部質量の半径分布。図中の点線は平衡解。 Inside-Out 期では、 $x < 0$、 $m < 0$、 $\sigma < 0$ である。

5.4.2 結果： Inside-out Collapse 期の相似解

本研究では、 $x = -500$ から $x \simeq 0$ までの相似解を積分によって得た。 $\omega = 0$ のときについては、図 5.17(a) ~ 図 5.17(c) に落下速度 $\xi(x)$、面密度 $\sigma(x)$ 及び内部質量 $m(x)$ の分布を表した。このとき Inside-out Collapse 期の相似解では、 x、 σ、 m は、定義より負で表されるが、わかりづらいので絶対値をつけた。図中の点線は、 5.2 節で得た平衡解である。

また、 $\omega \neq 0$ については、 $x = -500$ から $x = 0$ に向かって積分すると、途中に遷音速点 $x = \xi - 1$ があった。よって、その遷音速点までの相似解を積分によって得た。図 5.18 ~ 図 5.21 に $\omega = 0$ のときと同様に解を表した。 $\omega \neq 0$ では、平衡解は、 2 つ

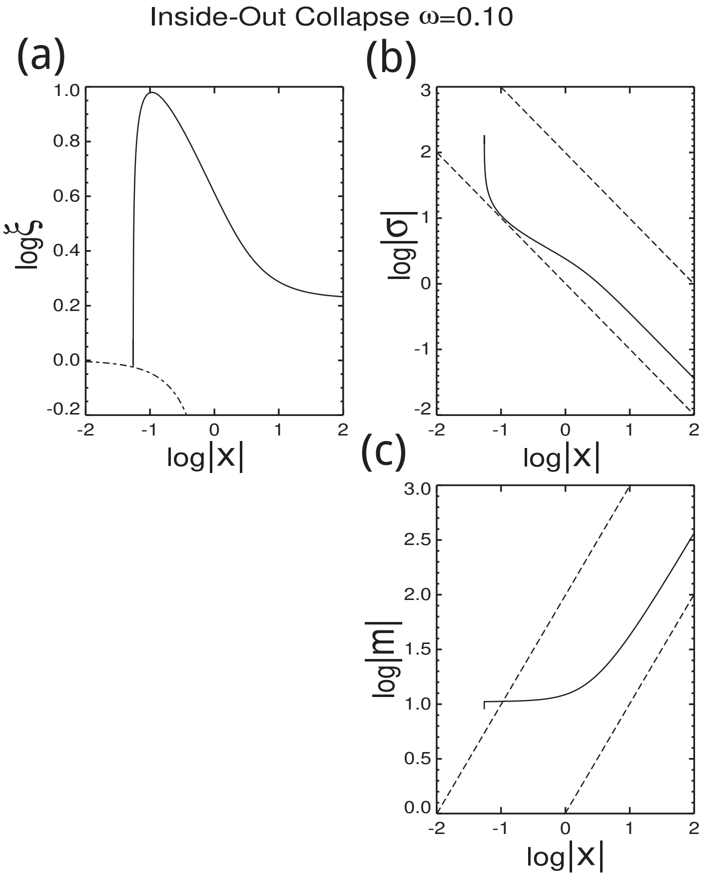


図 5.18: $\omega = 0.10$ についての、 Inside-Out Collapse 期の相似解。 (a) 落下速度、 (b) 面密度、 (c) 半径 x 内の内部質量の半径分布。図中の点線は平衡解。 Inside-Out 期では、 $x < 0$、 $m < 0$、 $\sigma < 0$ である。

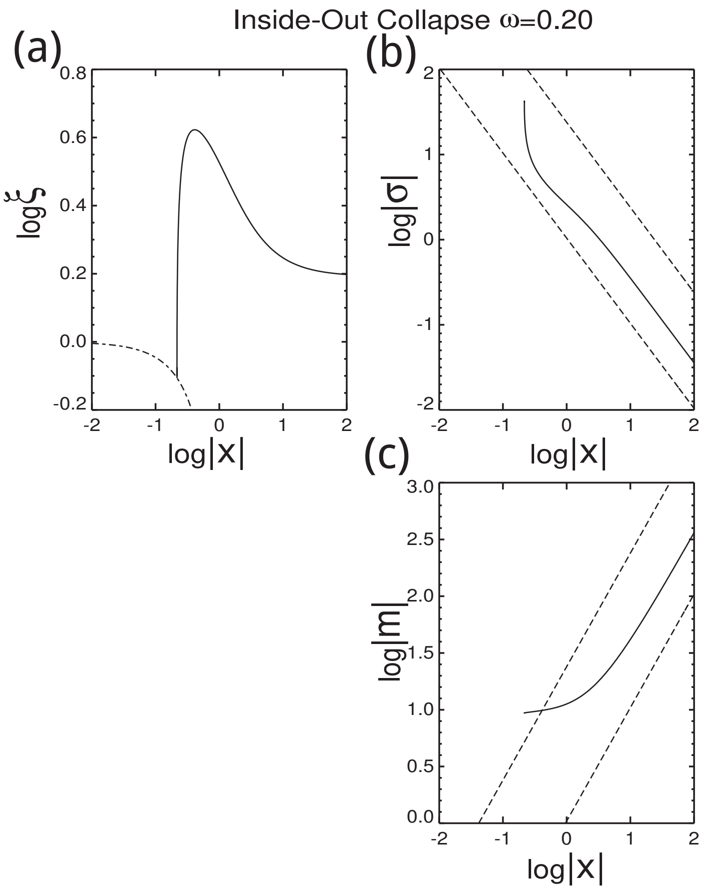


図 5.19: $\omega = 0.20$ についての、 Inside-Out Collapse 期の相似解。 (a) 落下速度、 (b) 面密度、 (c) 半径 x 内の内部質量の半径分布。図中の点線は平衡解。 Inside-Out 期では、 $x < 0$、 $m < 0$、 $\sigma < 0$ である。

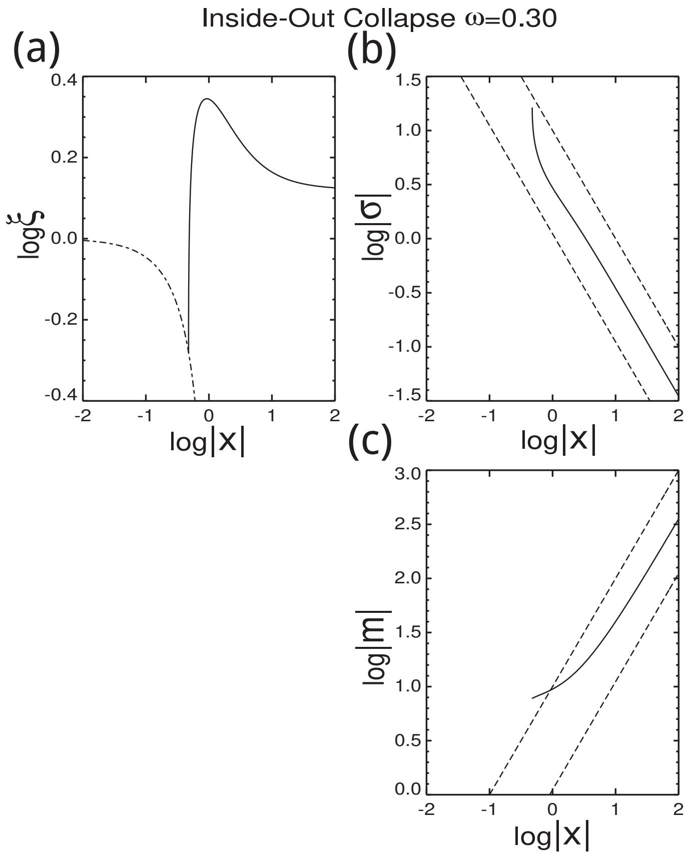


図 5.20: $\omega = 0.30$ についての、 Inside-Out Collapse 期の相似解。 (a) 落下速度、 (b) 面密度、 (c) 半径 x 内の内部質量の半径分布。図中の点線は平衡解。 Inside-Out 期では、 $x < 0$、 $m < 0$、 $\sigma < 0$ である。

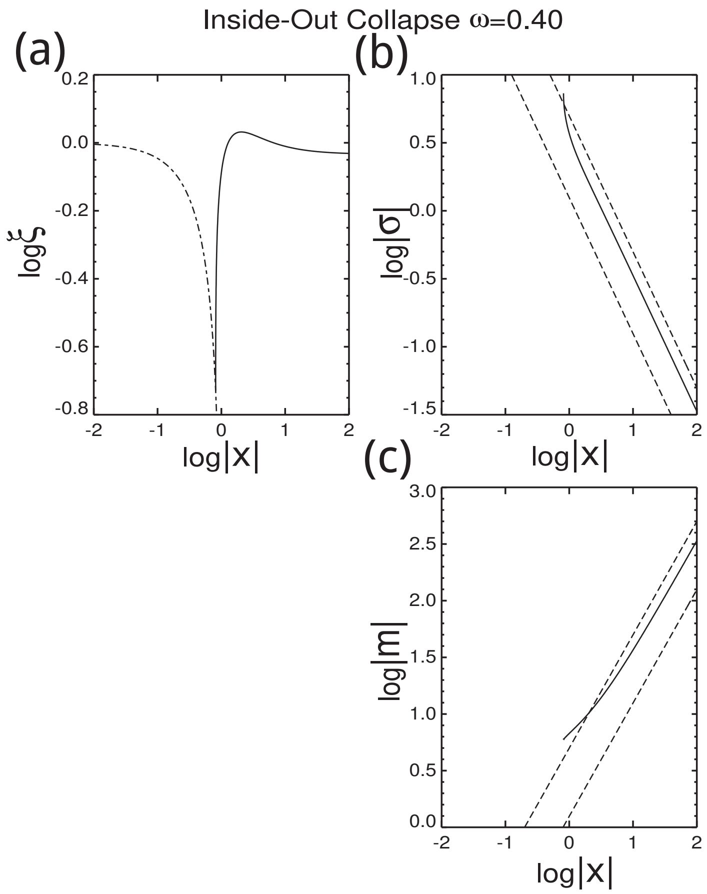


図 5.21: $\omega = 0.30$ についての、 Inside-Out Collapse 期の相似解。 (a) 落下速度、 (b) 面密度、 (c) 半径 x 内の内部質量の半径分布。図中の点線は平衡解。 Inside-Out 期では、 $x < 0$、 $m < 0$、 $\sigma < 0$ である。

存在する。また、破線は遷音速となるところを表した。この破線の内側が亜音速、外側が超音速である。

この結果により、Inside-out Collapse 期の進化を特徴づける量を読みとる。x_{in} を、落下速度が減少する半径とする。また、落下速度が初期の値から増加をはじめる半径を x_d とする。表 5.2 にこの値を示した。

表 5 · 2 Inside-out Collapse 期の解の特徴的な値

ω	m_{in}	遷音速点	x_{in}	x_d
0.0	10.9	−	−	5.6
0.1	10.5	0.05	0.11	6.3
0.2	9.3	0.21	0.49	7.9
0.3	7.8	0.50	0.90	10.0
0.4	6.0	0.77	1.91	15.8

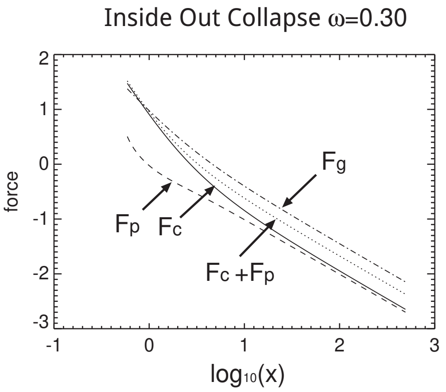


図 5.22(a): Inside-Out Collapse 期の $\omega = 0.30$ の相似解の力の大きさの比較。圧力を F_p、遠心力を F_c、 重力を F_g で表してある。実線は、外向きの力の和。

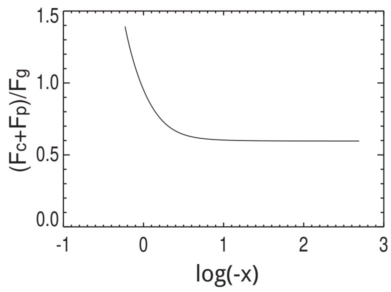


図 5.22(b): 内向きの力:F_g と外向きの力:F_p+F_c の比。

図 5.18 ~ 図 5.21 の図 (a) によると、回転のある場合、 x_{in} と x_d によって大きく 3 つの領域に分けれていることがわかる。 x_{in} で落下速度が、減少しているのは遠心力のためである。これは図 5.22(a) の力の大きさの比較により示されている。 x_{in} より内側では、圧力と遠心力を合わせたもが重力に対して大きくなっている。

一方、 x_{in} より外側では、圧力と遠心力を合わせたものと重力の比はほぼ一定である。図 5.22(b) にその比を表した。これによると、 x_{in} の外側では、重力がその他の力に対してほぼ 2 倍となっている。つまり、 x_{in} の外側では、ほぼ自由落下となっている。 x $\gg x_d$ では、初期状態 $\xi = \xi_{-\infty}$ と $\sigma = A_-/x$ が保たれている。 x_d は、力学的には特別な半径ではない。しかし、 x_d は、初期状態のままの領域と力学的に進化した領域を分けるのに有効である。 x_{in} と x_d の間で落下速度が増加しているように見えるのは自由落下のタイムスケールのためである。

x_{in} の遠心力によって支えられている領域への質量降着を考える。3.2.1 節の Shu et al. のように（彼らは、球対称のもの）、内部質量 m_{in} から質量降着率を導いた。$m(x)$ は、(4.48) で

$$M(r,t) = \frac{c_s^3 m(x)}{G}(t_0 - t), \tag{5.60}$$

と定義した。よって、質量降着率 $\dot{M}$ は、

$$\dot{M}(r,t) = \frac{c_s^3}{G}(-m(x)), \tag{5.61}$$

となる。次元量に直すと、

$$\dot{M}(r,t)[M_\odot/yr] = 1.89 \times 10^{-6}(-m(x))\left[\frac{c_s}{0.2kms^{-1}}\right]^3, \tag{5.62}$$

ここで、$c_s = 0.2\mathrm{km\ s^{-1}}$ は、分子雲コアでの典型的な音速である (Shu et la. 1987)。この、結果、x_{in} の遠心力によって支えられている領域への質量降着がもとまる。例えば $\omega = 0.3$ の場合、$1.4 \times 10^{-5} M_\odot/yr$ となる。この値は、観測とも合うものである。

5.5 1 次元数値シミュレーション

我々のモデルである Thin Disk 近似したガス円盤がどのような構造で進化するのかを Runaway Collapse 期について数値シミュレーションにより調べた。これにより、このモデルは相似的に進化をすることを確認した。この 1 次元数値シミュレーションの最大の目的は本研究で得られた相似解の確認とその解への収束性を調べることである。

5.5.1 基礎方程式及び、スキーム

このシミュレーションの基礎方程式は式 (4.20)、 (4.21)、 (4.22) 及び、 (4.32) 式の Thin Disk 近似した式である。ポアソン方程式以外の流体の式を、保存形に書き直すと

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(r\begin{bmatrix}\Sigma \\ \Sigma v_r \\ \Sigma j\end{bmatrix}\right)+\frac{\partial}{\partial r}\left(r\begin{bmatrix}\Sigma v_r \\ \Sigma(v_r^2+c_s^2) \\ \Sigma v_r j\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}0 \\ -\Sigma\dfrac{j^2}{r^2}-c_s^2\Sigma+rg_r\Sigma \\ 0\end{bmatrix}=0, \quad (5.63)$$

となる。スキームは、数値的に安定な風上差分 TVD 法を用いた。重力は、 (4.32) の Bessel 関数による積分を行って計算した。空間メッシュは等間隔に 1800 個とり、空間、時間に対し 2 次精度で計算した。また、計算で使う変数の規格化は、面密度の単位を Σ_c として

$$(\Sigma_c, c_s, G) = (1, 1, 1) \quad (5.64)$$

とした。

5.5.2 初期状態

目的はシミュレーションにより、本研究で得られた相似解への収束性を調べることである。よって、初期条件は、面密度について相似解に似せた関数形

$$\Sigma(r, 0) = \frac{a}{\sqrt{b^2+r^2}}, \quad (5.65)$$

をとった。そして、 a, b を $(a,\, b) = (3,\, 2), (4,\, 2), (5,\, 2)$ についてシミュレーションを行なった。このとき、初期の落下速度分布、角運動量分布を初期の面密度に対して相似進化に合うように決めた。また、初期のガス円盤の回転は、相似的な進化で満たされるべき $j = \omega\dfrac{G}{c_s}M$ を使って与えた。これにより、初期に本研究で得られた相似解とことなる相似進化をさせた。

5.5.3 1次元 Thin Disk 数値シミュレーションの結果

これらのシミュレーションの結果をもとに、本研究で得られた相似解への収束を調べた。

相似進化するとき、相似変数 Σ の定義 (4.46) より時間とともに中心の面密度は増加し $t=t_0$ となると発散する。

$$\frac{1}{\Sigma(0,t)}=\frac{2\pi G(t_0-t)}{c_s}\frac{1}{\sigma(0)}, \tag{5.66}$$

と進化する。この $\dfrac{1}{\Sigma(0,t)}$ を時間に対してプロットする。そして直線でフィットすれば、 t_0 及び $\sigma(0)$ が一意に決まる。我々は、これを最少二乗法を使って行なった。

この読み取った相似進化の座標上で数値シミュレーションの結果がどのような振る舞いをするのかを調べた。図 5.23(a)(b)(c) に初期状態を破線で表し、中心密度が、ほぼ初期に対して 2 桁高くなったときの密度分布を点線で表した。また、この図中に我々が半解析的に得た Runaway Collapse 期の相似解を実線せ表してある。こらによると、相似解からのいろいろなずれ型をした初期状態すべてに対して進化が我々の相似解に近づいているのがわかる。

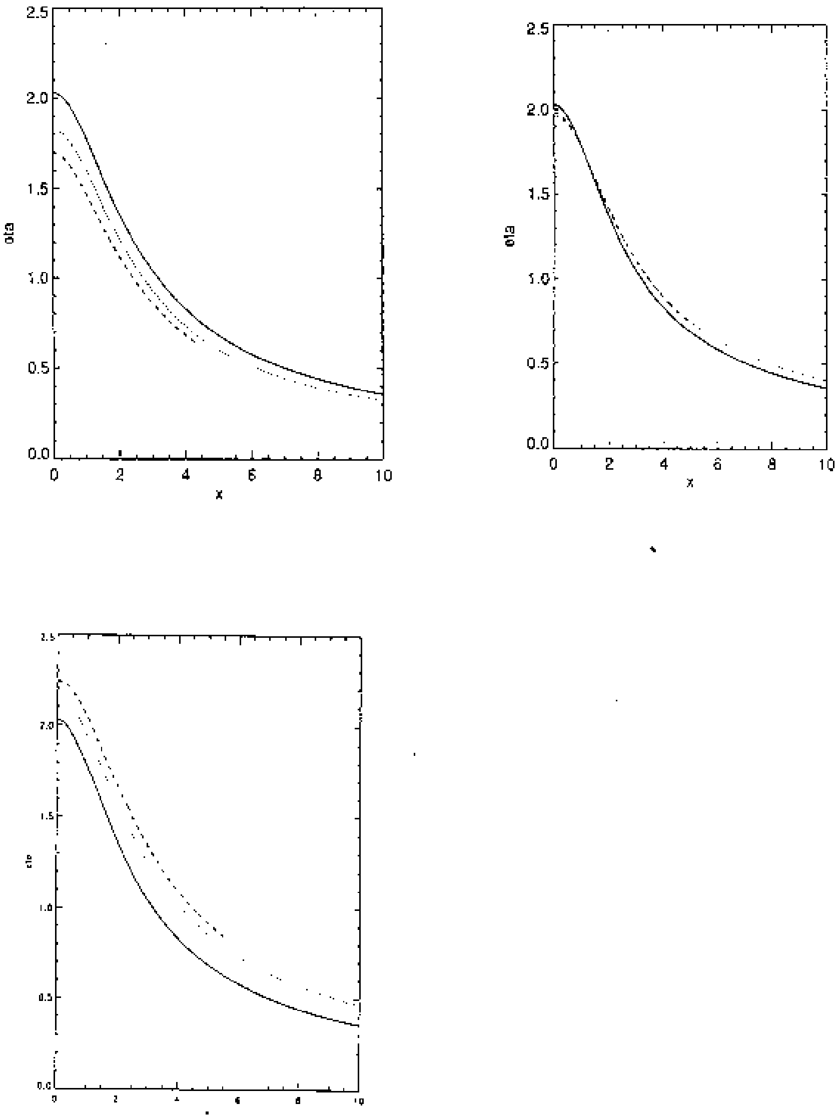


図 5.23: いろいろな初期状態からの 1 次元 Thin Disk 数値シミュレーションの結果を相似座標での表現に変換したもの。縦軸が赤道面上の密度、横軸が半径 x である。初期状態を (a)(a,b)=(3,2)、 (b)(a,b)=(4,2)、 (c)(a,b)=(5,2) とし、図中に破線で表した。中心密度が、ほぼ初期に対して 2 桁高くなったときの密度分布を点線で表した。これらの進化に対する相似解を実線であらわした。

6　議論

回転するガス雲や、磁場に貫かれたガス雲は、動的に収縮する薄いガス円盤を形成することが示されている。本研究で得られた相似解は、そのような薄いガス円盤の進化と構造を明らかにした。この章では、相似解とこれら数値シミュレーションの面密度分布などの進化とを比べてみる。

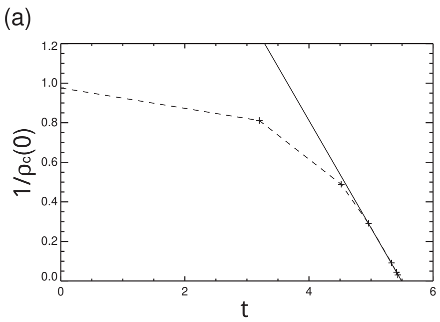
6.1　相似解とシミュレーションとの定量的定量的比較

6.1.1　磁場に貫かれたガス雲のシミュレーションとの比較

5.1 節での議論のように、本研究で得られた相似解は、実効的な音速と重力定数を用いれば磁場に貫かれたガス円盤の進化も表している。過去に行われた磁場に貫かれたガス雲の数値シミュレーションから相似進化の変数の数値を読みとった。相似進化を表すのにその指標として漸近解での定数である σ_0、 A_+ 及び、 ξ_∞ を使った。これと、相似解の値（表 5.1）と定量的に数値の比較を行った。特に断らない限り単位系は、 c.g.s 単位系を使う。

(1)Nakamura et al. (1995) との比較

Nakamura et al. (1995) の 2 次元軸対称の数値シミュレーション (モデル A1) は、図 4.1 に表してある。図中の単位系は長さ、時間、密度をそれぞれ H、 $1/\sqrt{2\pi G\rho_0}$、ρ_0 である。図中の $\alpha = 1$ とは、計算の初期でのガスの熱エネルギーと磁気エネルギーの比 $\dfrac{B_z^2}{8\pi c_s^2\rho_c}$ の値である。 α は、薄い円盤となるまで、値が減少している。計算の最終段階で α は、約 0.2 となっていた。



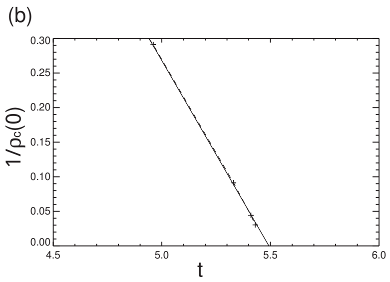


図 6.1(a): Nakamura et al. の 2 次元軸対称の数値シミュレーションの結果を使って相似進化との対応を調べたもの。 $\rho_c(0)$ は、半径 0 での赤道面上の密度。横軸が時間、縦軸が $\rho_c^{-1/2}(0)$ を表している。これは、相似進化している時、直線となる量である。実線は、計算の最終段階で漸近する直線を表している。これにより、相似手的進化の系列が一意に決まる。

図 6.1(b): (a) の図で計算の最終段階を拡大したもの。

シミュレーションでの定数の読みとりの値を σ'_0、A'_+、ξ'_∞ とする。と書き換えた値を使うとまず、中心面密度 σ'_0 を得る。 Nakamura et al. (1995) では、中心での赤道面密度 $\rho(t,0)_c$ の時間に対する表が与えられているのでこれを使う。面密度分布の漸近解は、 $\Sigma(0,t)=\dfrac{c_s}{2\pi G}\dfrac{\sigma'_0}{t_0-t}$ である。 Thin Disk 近似の関係式

$$\rho_c=\frac{\pi G}{2c_s^2}\Sigma^2, \tag{6.1}$$

を使って $\rho_c(t,0)$ の式に書き直すと

$$\frac{1}{\sqrt{\rho_c(0)}}=\left(\frac{\sqrt{8\pi G}}{\sigma'_0}\right)(t_0-t), \tag{6.2}$$

となる（Nakamura et al. の単位系では、 $2\pi G=1$ となる）。図 6.1 に時間に対する $\dfrac{1}{\sqrt{\rho_c(0)}}$ の値を表した。相似進化するとこの値は直線にのる。進化が図中の直線に漸近

すると考える。この直線は、$\dfrac{1}{\sqrt{\rho_c}} = \dfrac{5.5-t}{1.84}$ である。よって、$\sigma'_0 = 3.68$ となる。

次に、面密度の x^{-1} の係数 A'_+ を読みとる。図中の破線が、漸近解とする。そのとき c'_s が実効的な音速であることに注意して $A'_+ = 5\sqrt{1+\alpha}$ となる。

速度分布の進化は、図のように相似解への収束が悪い。しかし、その読みとり値 1.2 は、ξ'_∞ の下限値とする事ができる。

これらの、磁場の入ったシミュレーションから読みとりの値を実効的な音速、重力定数を使って、相似解と比べる。(4.71)、(4.70) と相似変数の定義より、

$$(\sigma_0,\, A_+,\, \xi_\infty) = (\frac{1-\alpha}{\sqrt{1+\alpha}}\sigma'_0,\, \frac{1-\alpha}{1+\alpha}A'_+,\, \frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}\xi'_\infty), \tag{6.3}$$

とすれば、漸近解の係数と比較できる。

以上より、Nakamura et al. (1995) での相似進化を本論文の変数で表すと

$$(\sigma_0,\, A_+,\, \xi_\infty) = (2.7,\, 4.0,\, >\, 1.1), \tag{6.4}$$

となる。

(2)Tomisaka (1995) との比較

Tomisaka (1995) の 2 次元軸対称の数値シミュレーション (モデル A) は、図 4.2 に表してある。図中の単位系は、ρ_s を定数として長さ、時間、密度をそれぞれ $c_s/\sqrt{4\pi G\rho_s},\, 1/\sqrt{4\pi G\rho_s},\, \rho_s$ としたものである。計算の初期は、$\alpha = 0.5$ であり、計算の最終段階で $\alpha = 0.35$ となっていた。

Tomisaka (1995) では、密度分布などに対する時間の値がほとんど記載されておらず、中心面密度 σ'_0 を見積もることが出来なかった。

係数 A'_+ を読みとる。このとき、面密度の軸方向の積分範囲が、本論文の定義と異なっている。このような困難を回避するために、赤道面上の密度 $\rho(r,t)_c$ を使い A'_+ を見積もる。まず、漸近解を (6.1) を使い $\rho_c(r,t)$ の式に書き直すと

$$\rho_c(r) = \left(\frac{c_s^2}{8\pi G}\right)\frac{A'^2_+}{r^2}, \tag{6.5}$$

となる。Tomisaka (1995) の単位系では、$\rho_c(r) = \dfrac{A'^2_+}{2r^2}$ となる。図 4.2(b) より、赤道面上の密度分布は、$\rho = \dfrac{21.92}{r^2}$ に漸近する。つまり、$A'_+ = 6.62$ となる。速度分布の進化は、計算の最終での最大値を ξ'_∞ とする。図 4.2(b) 中の点線より、$\xi'_\infty = 2.5$ である。

Tomisaka (1995) での相似進化を本論文の変数に直す。(6.3)、$\alpha = 0.35$ より

$$(\sigma_0, A_+, \xi_\infty) = (- , 3.18, 2.15), \tag{6.6}$$

となる。

(3) まとめ

本研究で得られた相似解を比較と (1) と (2) で得た漸近的相似進化を表す値とを比較する。表６・１に漸近解の係数の比較を表した。これにより、相似解は、30% 程度の違いで２次元軸対称のシミュレーションと合っている。

Nakamura et al の場合、図 4.1 の v_r によると相似進化への収束が悪い段階で計算をやめている。これによる影響は、(6.2) より、σ_0 を大きく見積もっている。係数 A_+ についての影響は、はっきりとは現れていなかた。また、落下速度への影響は、図 6.1 より ξ_∞ を小さく見積もることである。

表 6 · 1 磁場に貫かれたガス円盤のシミュレーションと相似解の比較

	α	σ_0	A_+	ξ_∞
Nakamura et al.	0.20	2.7	4.0	>1.1
		(1.35)	(1.11)	
Tomisaka	0.35	-	3.2	2.2
		(-)	(0.88)	(1.24)
相似解		2.0	3.61	1.74

カッコ内は本研究で得られた相似解との比

6.1.2　回転しているガス雲のシミュレーションとの比較

回転するガス雲の２次元軸対称数値シミュレーションの相似進化は、Matsumoto et al.(1995) によって研究されている。このとき得られた相似進化と本研究での相似進化を定量的に比較する。その指標として漸近解での定数である σ_0、A_+ 及び、ξ_∞ を使った。

Matsumoto et al.(1995) は、初期状態を圧力、重力及び遠心力が半径方向に釣り合っている円筒状のガスをとった。図中の単位系は、密度が初期の中心密度 ρ_0、時間が $1/\sqrt{2\pi G\rho_0}$ である。長さの単位は、典型的なガス円柱の半径である $\rho_0/4$ となる半径の $1/2\sqrt{2}$ である。図中の β とは、計算の初期でのガスの圧力勾配と遠心力の比

$$\beta = \left(\frac{c_s^2}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial r}\right) \div \left(\frac{\omega^2 j^2}{r}\right) \tag{6.7}$$

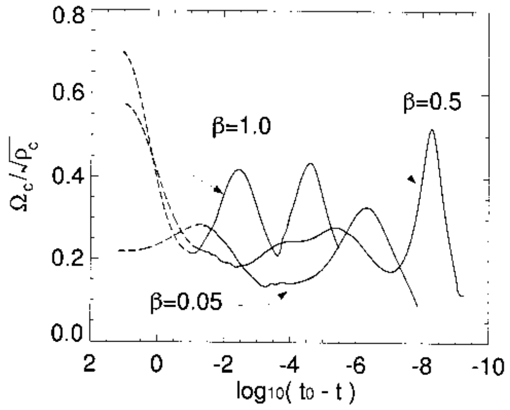


図 6.2: Matsumoto et al. が、2 次元軸対称数値シミュレーションでの結果をもとに単位面密度あたりの角運動量の時間変化を調べたもの。いろいろな初期状態からの計算を比較してある。縦軸は、我々が ω と定義した量である。(Matsumoto et al. 1995 より)

である。

Matsumoto et al.(1995) は、図 6.2 に表したように角運動量と面密度の比の時間変化を調べている。図中の $\dfrac{\Omega_c}{\sqrt{\rho_c}}$ は、本研究での ω にあたる。よって、$\beta = 1$ のとき $\omega = 0.3 \pm 0.1$ となっている。

図 4.3(a)(b) は、Matsumoto et al.(1995) の数値シミュレーションによる面密度と落下速度分布の進化である。図 6.3 は、時間に対する $\dfrac{1}{\sqrt{\rho_c(0)}}$ の値である。この漸近的に収束していく直線は、図中の単位系で $\dfrac{1}{\sqrt{\rho_c}} = \dfrac{5.93 - t}{0.52}$ である。よって、$\sigma_0 = 3.85$ となる。図 4.3(a)(b) より、$A_+ = 5.5$ と $\xi_\infty = 1.6$ が読みとれる。相似解との定量的比較を表 6・2 に示した。

表 6 · 2 回転しているガス円盤のシミュレーションと相似解の比較

	α	σ_0	A_+	ξ_∞
Matsumoto et al.	0.00	3.85	5.5	1.6
		(1.6)	(1.6)	(1.2)
相似解		2.47	3.50	1.31

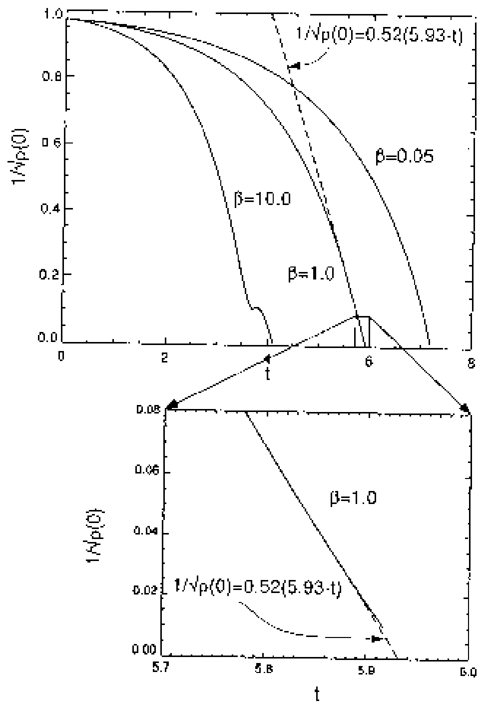


図 6.3: Matsumoto et al. が、2 次元軸対称数値シミュレーションと相似進化の対応を調べたもの。$\rho_c(0)$ は、半径 0 での赤道面上の密度。横軸が時間を表し、縦軸が $\rho_c^{-1/2}(0)$ を表している。これは、相似進化している時、直線となる量である。破線は、計算の最終段階で漸近する直線を表している。これにより、相似手的進化の系列が一意に決まる。(Matsumoto et al. 1995 より)

6.1.3 相似解とのずれについての考察

回転しているガス円盤の場合、本論文の相似解との一致が悪い。これはおもに、Thin Disk 近似のためであると思われる。

z に対して静水圧平衡なので面密度が小さいと、円盤の厚みは大きくなる。これは、(4.15) 式の z に対する厚みを表す $h(r)$ という変数が (4.16) 式と (4.18) 式により

$$h(r) = \frac{c_s^4}{\pi^2 G^2 \Sigma(r)}, \tag{6.8}$$

と表されることで理解される。円盤の厚みがあまり薄くない場合、重力の過剰な見積もりがより大きなものとなり、面密度の過小な見積もりはより大きくなる。

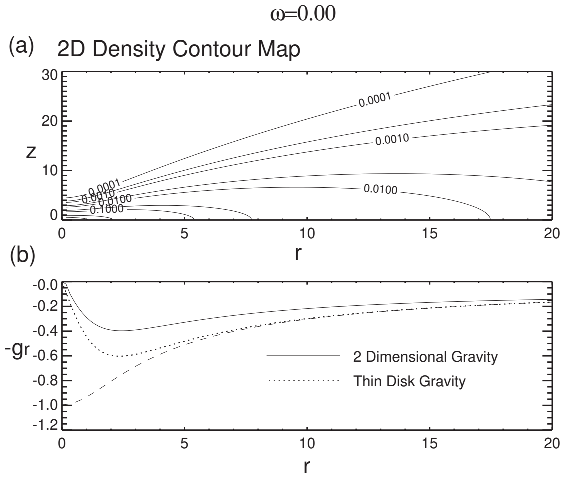


図 6.4: (a)$\omega = 0.00$ のときの Runaway 期の相似解をもとに Thin DIsk 近似を使って z 軸方向の密度を計算したもの。縦軸が z で横軸が r であり図は、等密度線である。(b) 異なる計算法における重力加速度分布の比較。横軸は、半径である。実線が、(a) の密度分布を使い z 方向に積分したもの。点線が、Thin Disk 近似をしたときの重力加速度の分布。破線が球対称重力場で近似したときの重力加速度の分布。

このことを得られた相似解で $\omega = 0.0$ と $\omega = 0.30$ の場合について調べた。相似解による面密度分布で軸方向に静水圧平衡を仮定すると $\omega = 0.0$ と $\omega = 0.3$ の場合それぞれに対し図 6.4(a) 図 6.5(a) のような密度分布か得られる。このときの半径方向の重力を (4.19) によって z で積分すると、近似なしの Thin Disk の重力加速度が得られる。図 6.4(b) と図 6.5(b) に実線でこの Thin Disk の重力加速度を表した。一方、Thin Disk 近似をした重力加速度をそれぞれ点線で表した。このように、回転が強くなり面密度が中心から遠方で小さくなると Thin Disk 近似の重力の重力の過剰な見積もりがより大きくなっている。

これが、回転しているガス円盤のシミュレーションで面密度を過小に見積もっている原因と思われる。

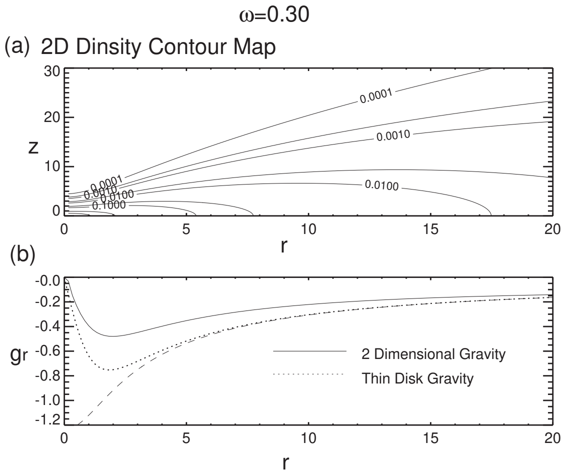


図 6.5: (a)$\omega = 0.30$ のときの Runaway 期の相似解をもとに Thin DIsk 近似を使って z 軸方向の密度を計算したもの。縦軸が z で横軸が r であり図は、等密度線である。(b) の図は、図 6.4(b) と同様に異なる計算法における重力加速度分布の比較。

6.2 Inside-out Collapse 期の相似解

6.2.1 Inside-out Collapse 期の相似解の性質

この節では、 Inside-out Collapse 期の進化を、本研究で得られた相似解をもとに考察する。

本研究では、回転しているガス円盤に対する Inside-out Collapse 期の相似解を遷音速点まで得ることができた (図 5.17 ~ 図 5.21)。本研究での解は、数値積分によって得られたものである。数値積分の方法では、滑らかにしか解を計算できない。この解の遷音速点付近での振る舞いは、超音速から急激に落下速度が落ちて遷音速点に近づいている。そして、図 5.18 ~ 図 5.21 の (b) によく現われているように特異面で遷音速点通過の条件を満たすためは、解が急激に折れ曲がらなければならない。

遷音速点に急激な折れ曲がりを持つような解は、不自然である。それは、このような解は、遷音速点に波がはり付いていることになるからである。よって、遷音速点付近の解は数値積分では、得られない不連続面を持つ解であると考えた方が自然である。そして、この不連続面を通じて平衡解につながると考えられる。この不連続面を持つ解の場合、遷音速点での方程式の特異性を回避できる。言い換えると。我々の描像は、超音速で落下するガスが回転で支られた準平衡な領域にショックを通して質量降着するものである。

このとき、不連続面の内と外の接続には、物理的な条件が付く。不連続面の通過前

と通過後での質量、運動量の保存則かその条件である。等温ガスの場合、不連続面の通過前と通過後をそれぞれ添字 1 と 2 で表すと

$$\Sigma_1 v_{r1} = \Sigma_2 v_{r2}, \tag{6.9}$$

$$\Sigma_1(c_s^2 + v_{r1}^2) = \Sigma_2(c_s^2 + v_{r2}^2), \tag{6.10}$$

が成り立たなければならない(ランキン=ユゴニオ条件)。よって、

$$c_s^2 = v_{r1} v_{r2} \tag{6.11}$$

が条件となる。これは、ショックが静止している座標系で満たされる。この条件の相似座標系での表現は、

$$1 = (\xi_1 - x)(\xi_2 - x) \tag{6.12}$$

となる。 x は、ショックの相似座標である。不連続面は、実座標でみると音速に比例する速度で外へ広がっている。

また、安定性の議論からも不連続面の座標に制約が付く。減速中に不連続面があると不安定となることが、 Nakayama (1992) により示されている。これは、以下のように説明できる。減速中に不連続面が少し内側に移動したとする。 (6.11) の式より、 v_{r1} と v_{r2} はそれぞれ $v_{r1} - \delta v$、 $v_{r2} + \dfrac{1}{\delta v}$ となると表せる。これを (6.10) 式に代入すると添字 2 の不連続面通過後の方が大きくなる。つまり、不連続面では、内側方向への力が働き不安定となる。よって、減速中ではなくて加速領域に不連続面がある。

以上の条件を使って、回転するガス円盤について Inside-Out Collapse 期の相似解を導くことができると思われる。この結果から、質量降着率などの観測的に重要な情報を定量的に導ける。

7　謝辞

今回の研究をするにあたって、指導教官である藤本光昭教授、花輪知幸助教授に感謝する。特に、この研究課題を与えてくださり、実質的な面倒を見てくださった花輪知幸助教授にはなみなみならぬお礼を述べたい。シミュレーションの流体計算のコードを譲ってくださり、さらにこの研究に関し多くの相談にのってもらい貴重な助言をしてくださった松本倫明氏、有益なアドバイスをしてくださった筑波大学の中村文隆氏にも感謝します。その他、 A 研の人々にはいろいろな点で協力をいただいた。

A 付き録

A.1 Runaway Collapse 期の相似解を与えるパラメータ

表 $A \cdot 1$ N=20 とした時、$\omega = 0.00$ の解を与えるパラメータセット

i	b_i	a_i
1	0.005	1.22552×10^{-9}
2	0.01	-3.60845×10^{-9}
3	0.05	2.23250×10^{-7}
4	0.1	-3.62693×10^{-6}
5	0.2	6.38215×10^{-5}
6	0.4	-4.12388×10^{-3}
7	0.5	1.58551×10^{-2}
8	0.7	-4.91518×10^{-2}
9	1.0	1.57275×10^{-1}
10	1.5	-8.84257×10^{-1}
11	2.0	1.00229×10^{1}
12	2.5	-1.55849×10^{1}
13	3.0	1.91255×10^{1}
14	4.0	-2.72448×10^{1}
15	5.0	5.10328×10^{1}
16	6.0	-7.70189×10^{1}
17	7.0	8.27043×10^{1}
18	8.0	-5.83316×10^{1}
19	9.0	2.40634×10^{1}
20	10.0	-4.39084

表 $A \cdot 2$ N=20 とした時、 $\omega = 0.10$ の解を与えるパラメータセット

i	b_i	a_i
1	0.005	-1.01164×10^{-9}
2	0.01	9.38262×10^{-10}
3	0.05	1.74566×10^{-7}
4	0.1	-3.19760×10^{-6}
5	0.2	5.87053×10^{-5}
6	0.4	-3.83510×10^{-3}
7	0.5	1.47239×10^{-2}
8	0.7	-4.52825×10^{-2}
9	1.0	1.41695×10^{-1}
10	1.5	-7.21117×10^{-1}
11	2.0	1.03400×10^{1}
12	2.5	-1.65591×10^{1}
13	3.0	1.97393×10^{1}
14	4.0	-2.72818×10^{1}
15	5.0	5.05058×10^{1}
16	6.0	-7.57415×10^{1}
17	7.0	8.10131×10^{1}
18	8.0	-5.69862×10^{1}
19	9.0	2.34631×10^{1}
20	10.0	-4.27508

表 $A\cdot 3$ N=20 とした時、 $\omega = 0.20$ の解を与えるパラメータセット

i	b_i	a_i
1	0.005	3.75274×10^{-10}
2	0.01	-1.65184×10^{-9}
3	0.05	1.63960×10^{-7}
4	0.1	-2.74089×10^{-6}
5	0.2	4.79956×10^{-5}
6	0.4	-2.96461×10^{-3}
7	0.5	1.10437×10^{-2}
8	0.7	-3.14664×10^{-2}
9	1.0	8.04634×10^{-2}
10	1.5	1.18141×10^{-1}
11	2.0	1.05130×10^{1}
12	2.5	1.89305×10^{1}
13	3.0	2.15211×10^{1}
14	4.0	-2.75656×10^{1}
15	5.0	4.92175×10^{1}
16	6.0	-7.22580×10^{1}
17	7.0	7.62274×10^{1}
18	8.0	-5.31033×10^{1}
19	9.0	2.17090×10^{1}
20	10.0	-3.93377

表 $A \cdot 4$ N=20 とした時、$\omega = 0.30$ の解を与えるパラメータセット

i	b_i	a_i
1	0.005	1.27265×10^{-10}
2	0.01	-1.06869×10^{-9}
3	0.05	1.45586×10^{-7}
4	0.1	-2.46405×10^{-6}
5	0.2	4.28601×10^{-5}
6	0.4	-2.54677×10^{-3}
7	0.5	9.20290×10^{-3}
8	0.7	-2.36920×10^{-2}
9	1.0	3.44254×10^{-2}
10	1.5	3.29838
11	2.0	4.54926
12	2.5	-1.32443×10^{1}
13	3.0	1.65547×10^{1}
14	4.0	-2.19400×10^{1}
15	5.0	3.93274×10^{1}
16	6.0	-5.76844×10^{1}
17	7.0	6.07541×10^{1}
18	8.0	-4.22599×10^{1}
19	9.0	1.72547×10^{1}
20	10.0	-3.12362

表 $A \cdot 5$ N=20 とした時、 $\omega = 0.40$ の解を与えるパラメータセット

i	b_i	a_i
1	0.005	9.05203×10^{-10}
2	0.01	-6.63764×10^{-9}
3	0.05	9.00362×10^{-7}
4	0.1	-1.58646×10^{-5}
5	0.2	3.01423×10^{-4}
6	0.4	-2.22538×10^{-2}
7	0.5	9.50628×10^{-2}
8	0.7	-3.81704×10^{-1}
9	1.0	2.79672
10	1.5	4.42288
11	2.0	-9.75755
12	2.5	1.41234×10^{1}
13	3.0	-1.13617×10^{1}
14	4.0	5.62916
15	5.0	-1.36425
16	6.0	-5.86320
17	7.0	1.17644×10^{1}
18	8.0	-1.09986×10^{1}
19	9.0	5.36581
20	10.0	-1.09731

参考文献

[1] Beckwith, S. V. W., Sargent, A. I. 1993, in Protostars and Planets III, ed. E. H. Levy & J. I. Lunine(The University of Arizona Press, Tucson & London), 245-277, The Occurrence And Properties of Disks Around Young Stars.

[2] Bodenheimer, P., Sweigart, A. 1968, ApJ 152, 515

[3] Boss, A. P., Black, D. C. 1982, ApJ 258, 270

[4] D'Antona, F., Mazzitelli, I., 1994, ApJ Sup. 90, 467

[5] Foster, P. N., Chevalier, R. A. 1993, ApJ 416, 303

[6] Hayashi, C. 1966, Ann. Rev. Astron. Astrophys. 4, 171

[7] Hirano, N., Kameya, O., Kasuga, T., Umemoto, T., 1992, ApJ, 390, L85

[8] Hirano, N., Hasegawa, T., Hayashi, M., Tamura, M., Ohashi, N., 1995, Astrophysics and Space Science, 224, 113

[9] Hunter, C. 1977, ApJ 218, 834

[10] Iben, I., Jr. 1965, Apj 141, 993

[11] Kenyon, S., Hartmann, L., 1995, ApJ Sup. 101, 117

[12] Lada, E. A., Strom K. M., Myers P. C. 1993, in Protostars and Planets III, ed. E. H. Levy & J. I. Lunine(The University of Arizona Press, Tucson & London), 245-277, Environments of Star Formation: Relationship Between Molecular Clouds, Dense Cores And Young Stars.

[13] Larson, R. B. 1969, MNRAS 145, 271

[14] Leung, C. M., Brown, R. L., 1977, ApJ 214,L73

[15] Lin, D. N. C., Hayashi, M., Bell, K. R., Ohashi, N. 1994, ApJ 435, 821

[16] Matsumoto, T., Nakamura, F., Hanawa, T. 1995, in preparation

[17] McCaughrean, M. J, O'Dell, C. R., 1996, in preparation

[18] Myers, P. C., Linke, R. A., Benson, P. J. 1983, ApJ 301, 398

[19] Myers, P. C., Dame,T. M., Thaddeus, P., Cohen, R. S., Silverberg, R. F.,et al. 1986, ApJ 301, 398

[20] Myers, P. C., Bachiller, R., Caselli, P., Fuller, G. A., Mardones, D., Tafalla, M., Wilner, D. J. 1995, ApJ 449, L65

[21] Nakamura, F., Hanawa, T., Nakano, T. 1995, ApJ 444, 770

[22] Nakayama, K. 1992, MNRAS 259, 259

[23] Narita, S., Hayashi, C., Miyama, S. M. 1984, Prog. Theor. Phys. 72, 1118

[24] Norman, M. L., Wilson, J. R., Barton, R. T. 1980, ApJ 239, 968

[25] Onishi, T., Mizuno, A., Kawamura, A., Ogawa, H., Fukui, Y. 1996, submitted to ApJ

[26] Penston, M. B. 1969, MNRAS 144, 425

[27] Shell, R. L., Loren, R. B., Plambeck, R. L. 1980, ApJ 239, L17

[28] Shu, F. H. 1977, ApJ 214, 488

[29] Shu, F. H., Adams, C., Lizano, S. 1987, Ann. Rev. Astron. Astrophys. 25, 23

[30] Shu, F. H., Najita, J., Galli, D., Ostriker, E.,Lizano, S., 1993, in Protostars andPlanets III, ed. E. H. Levy & J. I. Lunine (The University of Arizona Press, Tucson & London), 3-45,The Collapse of Clouds and The Formation and Evolution of Stars and Disks.

[31] Sargent, A. I., Beckwith S. 1987, ApJ 323, 294

[32] Tomisaka, K. 1995a, ApJ 438, 226

[33] —— 1995b, submitted to ApJ

[34] Whitworth, A., Summers, D. 1985, MNRAS 214, 1

[35] Zhou, S., Evans II, N. J., Kömpe, C., Walmsley, C. M. 1993, ApJ 404, 232