

指導教官:大須賀健教授

卒業論文

数値流体シミュレーションによるライン
フォース駆動型円盤風の研究

筑波大学 理工学群 宇宙理論研究室 4年

201910845

黒田裕太郎

令和5年1月30日

数値流体シミュレーションによるラインフォース駆動型円盤風の研究

201910845 黒田裕太郎
指導教官 大須賀健教授

背景

ラインフォースとは、金属元素による束縛-束縛遷移吸収によりガスを加速させる力である。ラインフォース駆動型円盤風は超大質量ブラックホールの標準円盤で発生すると考えられている。先行研究である Nomura et al 2021 では、軸対称 2 次元輻射流体計算を行っている。ただし、円盤は境界条件として計算されているため、円盤の時間発展は計算されていない。また、輻射力を評価するときに、フォースマルチプライヤーを使用している。フォースマルチプライヤーは円盤風の速度勾配、密度、電離度、温度の簡単な関数で表されていて、ラインフォースを近似的に計算している。

目的

上記の背景から、「モンテカルロ輻射輸送コード“MONACO(東大の小高氏作成)”を用いてラインフォースを正確に評価しつつ、ラインフォース駆動型円盤風と円盤の構造および時間発展を同時に解く」ことが研究目的である。この研究目的に向けた準備として、卒業研究では、「振動数依存型の球対称 1 次元輻射流体コードを作成し、簡易的な吸収モデルを用いてラインフォース駆動型アウロフローの定常構造を調べ、ラインフォースの特性を理解する」ことが目標である。

状況設定

$r = 0$ にブラックホールと光源を設置した。計算領域は $r = [10^2 R_s, 10^5 R_s]$ 、 $\nu = [\nu_{\min}, \nu_{\max}]$ とした。ブラックホールの質量は 10^5 太陽質量と設定し、 $r = 10^2 R_s$ に入射する単位振動数あたりの光度 L_ν は $L_\nu = 4.58 \times 10^2 [\text{erg}]$ と一定とし、 $\int_{\nu_{\min}}^{\nu_{\max}} L_\nu d\nu = 6L_{\text{Edd}}$ としている。 r は動径方向の距離、 R_s はシュバルツシルト半径、 ν は振動数、

L_{Edd} はエディントン光度、 $\nu_{\min} = 1.76 \times 10^{15} [\text{s}^{-1}]$ 、 $\nu_{\max} = 3.00 \times 10^{15} [\text{s}^{-1}]$ を表す。

不透明度を 4 つのモデルに分けて、振動数依存型の球対称 1 次元輻射流体計算を時間 $t = 0$ から $t = 5.3 \times 10^5 [\text{s}]$ まで実施した。

結果・考察

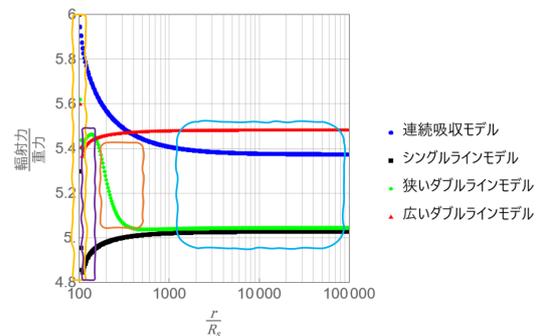


図 1 振動数依存型の球対称 1 次元輻射流体の $t = 5.3 \times 10^5 [\text{s}]$ の計算結果

図 1 の考察を以下でまとめた。(※は自明)

- 「黄色枠」
ラインの幅が広いほど輻射力は強くなる
*同じ振動数の光子を吸収し続けると、外側領域の輻射力は減少する
- 「紫色枠」
速度勾配により遠方でも輻射力/重力が増加する(連続吸収とは異なる)
- 「オレンジ色枠」
ラインの重なり効果により輻射力が減少する
- 「水色枠」
*光学的に薄い領域では輻射力/重力は一定になる

目次

第 1 章	本研究に必要な基礎知識	2
1.1	ブラックホール降着円盤の基礎知識	2
1.2	輻射の基礎知識	3
1.3	ラインフォースの基礎知識	5
第 2 章	研究の背景と目的	9
2.1	研究背景	9
2.2	研究目的	10
第 3 章	計算手法	12
3.1	基礎方程式	12
3.2	モデルの説明	12
3.3	計算の状況設定	13
第 4 章	本計算の結果と考察	15
4.1	本計算の結果	15
4.2	テスト計算と本計算の考察	17
第 5 章	まとめと結論	24
第 6 章	Appendix	26
6.1	Bondi 降着	26
6.2	輻射加速型 outflow(減光なし)	29

第 1 章

本研究に必要な基礎知識

以下では、「ブラックホール降着円盤の基礎知識」、「輻射の基礎知識」、「ライنفォースの基礎知識」に分けて本研究に必要な基礎知識をまとめる。

1.1 ブラックホール降着円盤の基礎知識

以下では、本研究に必要なブラックホール降着円盤の内容をまとめる。

1.1.1 ブラックホール降着円盤の物理的状況

ブラックホールは、とても重い天体であり、光さえも吸収してしまう暗黒の天体である。重さとしては、10 太陽質量位の重さから 10^8 太陽質量位の重さまでである。そのブラックホールの周りには密度の高い円盤があるとされている。

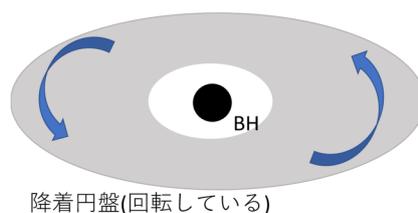


図 1.1 ブラックホール (BH) と降着円盤のイメージ図

そうしたブラックホールの降着円盤では、以下のように光を発生させている。

1. 重力によりガスがブラックホールに落ちてくる。
2. ガスが運動エネルギーを持つ。
3. 摩擦でガスが熱を持つ。
4. 熱によりガスが光る。

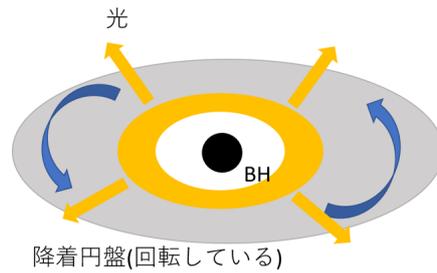


図 1.2 BH と光っている降着円盤のイメージ図

1.1.2 3種類の降着円盤

降着円盤には3つの種類があると考えられている。

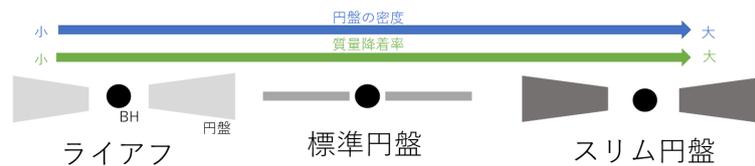


図 1.3 3種類の降着円盤

種類ごとに説明する。

- リアフ
リアフは幾何学的に厚く、光学的に薄い円盤である。また、リアフは超高温で X 線を放射する。これは、密度が低いことにより、熱エネルギーから光エネルギーに変換しづらいためである。
- 標準円盤
標準円盤は幾何学的に薄く、光学的に厚い円盤である。標準円盤は熱エネルギーを光のエネルギーに変換しやすいので、温度が低く、ある程度明るくなる。
- スリム円盤
スリム円盤は幾何学的に厚く、光学的に厚い。スリム円盤の特徴として、光子捕獲が起こる。光子捕獲とは、円盤で生成された光子が BH 中心に吸収されることである。光子捕獲により漏れ出た光でとても明るく光る。

1.2 輻射の基礎知識

以下では、本研究に必要な輻射の内容をまとめる。

1.2.1 輻射力

量子力学より、振動数 ν の光子はプランク定数 h 、光速 c と置いた時、エネルギー $h\nu$ 、運動量 $\frac{h\nu}{c}$ を運ぶ。つまり、光子からエネルギーを得ることができる。もし、単位時間単位面積当たりの輻射のエネルギーを F とおいた場合、 $h\nu$ と F を同一視してみると単位時間単位面積あたりの運動量は F/c となる。単位時間単位面積あたりの運動量は圧力と同じ意味だとすると、粒子が受ける輻射力 f'_{rad} は断面積 S を用いて以下のように書くことができる。

$$f'_{\text{rad}} = \frac{S}{c} F \quad (1.1)$$

単位面積当たりの輻射力 $\langle f_{\text{rad}} \rangle$ は以下のようになる。

$$\langle f_{\text{rad}} \rangle = \frac{1}{c} F \quad (1.2)$$

粒子の質量を m 、不透明度を $\kappa_\nu (= \frac{\Sigma}{m})$ と置いた場合、単位質量あたりの輻射力 f_{rad} は以下のように書くことができる。

$$f_{\text{rad}} = \frac{S}{mc} F = \frac{\kappa_\nu}{c} F \quad (1.3)$$

密度を ρ と置いた場合、単位体積当たりの輻射力 $[f_{\text{rad}}]$ は以下のようになる。

$$[f_{\text{rad}}] = \rho \frac{S}{mc} F = \frac{\rho \kappa_\nu}{c} F \quad (1.4)$$

1.2.2 エディントン光度

エディントン光度 L_{Edd} とは、中心天体からの輻射力と重力の釣り合うときの光度である。ここでは、エディントン光度を導出する。

始めに、水素プラズマに加わる輻射力を求める。中心天体からの距離を r 、光度を L と置いた場合、単位時間単位面積当たりの輻射エネルギー f は以下のように書くことができる。

$$f = \frac{1}{4\pi r^2} L \quad (1.5)$$

水素プラズマにかかる輻射力 f'_{rad} を考える場合、陽子の散乱断面積よりも電子の散乱断面積が大きいので、水素プラズマにかかる輻射力は電子にかかる輻射力のみ考えればよい。自由電子の散乱断面積を σ_{T} と置いた場合、水素プラズマにかかる力は以下のようになる。

$$f'_{\text{rad}} = \frac{\sigma_{\text{T}}}{c} \frac{1}{4\pi r^2} L \quad (1.6)$$

次に、水素プラズマに加わる重力 f'_{gra} を求める。水素プラズマなので、電子と陽子が一個ずつ存在するが、電子の質量よりも陽子の質量が大きいので、陽子の質量 m_{p} と中心天体の質量 M の重力だけ計算すればよい。重力定数を G とした場合、重力は以下のようになる。

$$f'_{\text{gra}} = \frac{GMm_{\text{p}}}{r^2} \quad (1.7)$$

水素プラズマにかかる重力と輻射力から、エディントン光度 L_{Edd} は以下のように書くことができる。

$$f'_{\text{rad}} = f'_{\text{gra}} \quad (1.8)$$

$$\rightarrow \frac{\sigma_{\text{T}}}{c} \frac{1}{4\pi r^2} L_{\text{Edd}} = \frac{GMm_{\text{p}}}{r^2} \quad (1.9)$$

$$\rightarrow L_{\text{Edd}} = \frac{4\pi c GM m_{\text{p}}}{\sigma_{\text{T}}} = \frac{4\pi c GM}{\kappa_{\text{es}}} \quad (1.10)$$

$\kappa_{\text{es}} (= \frac{\sigma_{\text{T}}}{m_{\text{p}}}) = 0.4[\text{cm}^2/\text{g}]$ は電子散乱の不透明度である。

1.2.3 吸収のみの輻射輸送方程式と吸収のみの解

輻射はガス系の時間のタイムスケールよりも、はるかに早く伝わるので、輻射輸送は定常で考える。媒質中を進む距離を ds 、媒質中の位置を s 、単位振動数あたりの光度を $L_{\nu}(s)$ 、物質の密度を ρ 、不透明度を κ_{ν} と置いた場合、吸収のみの輻射輸送方程式は以下ようになる。

$$\frac{d}{ds} L_{\nu}(s) = -\kappa_{\nu} \rho L_{\nu}(s) \quad (1.11)$$

吸収のみの輻射輸送方程式は解を求めることができる。吸収のみの解は以下ようになる。

$$L_{\nu}(s) = L_{\nu}(s_0) \exp\left(-\int_{s_0}^s \rho \kappa_{\nu} ds'\right) \quad (1.12)$$

s_0 は媒質中を通過する開始の位置で、 ds' は媒質中を進む距離である。

1.2.4 プロファイル関数

不透明度を計算する時、プロファイル関数を使用する。本論文で使用するプロファイル関数は2種類ある。

ガウス関数型ドップラープロファイルは以下のように書く。

$$\phi_{\nu}(\nu_0) = \left(\frac{1}{\Delta\nu_D \sqrt{\pi}}\right) \exp\left(-\frac{(\nu - \nu_0)^2}{(\Delta\nu_D)^2}\right) \quad (1.13)$$

矩形型ドップラープロファイルは以下のように書く。

$$\phi_{\nu}(\nu_0) = \frac{1}{2\Delta\nu_D} \cdots (\nu_0 - \Delta\nu_D \leq \nu \leq \nu_0 + \Delta\nu_D) \quad (1.14)$$

$$\phi_{\nu}(\nu_0) = 0 \cdots (\nu \leq \nu_0 - \Delta\nu_D, \nu_0 + \Delta\nu_D \leq \nu) \quad (1.15)$$

ν は実験室系の振動数、 $\hat{\nu}_0$ は流体静止系のラインセンター、 $\nu_0 (= \hat{\nu}_0(1 + \frac{v}{c}))$ は実験室系のラインセンター、 v_{th} は熱速度、 $\Delta\nu_D (= \frac{v_{\text{th}} \hat{\nu}_0}{c})$ は熱的広がりを表す。

1.3 ラインフォースの基礎知識

以下では、本研究に必要なラインフォースの内容をまとめる。

1.3.1 ラインフォースとは

ラインフォースとは、金属元素による束縛-束縛遷移吸収によりガスを加速させる力のことである。以下の図 1.4 より、ある特定の振動数の光子を吸収することで金属元素のガスを加速することができる。

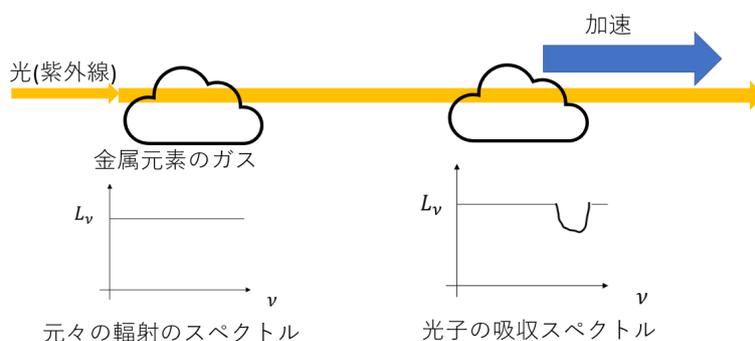


図 1.4 ラインフォースのイメージ図

ν は実験室系の振動数、 L_ν は単位振動数あたりの光度である。ラインフォースはどの BH の円盤でも発生するものではない。ラインフォースの発生する条件は、2つある。1つ目は、光の波長が紫外線であることである。理由は、束縛-束縛遷移吸収は束縛-束縛遷移に必要な特定の振動数（紫外線）でないと遷移しないためである。可視光などを金属元素にあててもラインフォースは働かない。2つ目は、金属元素が電離していないことである。電離していると金属元素の励起状態が存在しておらず、束縛-束縛遷移が起こらない。

ラインフォースの発生する条件から、ラインフォースは超大質量ブラックホールの標準円盤で発生すると考えられる。恒星質量の BH の標準円盤である場合、X 線により金属元素が電離しているため、ラインフォースは発生しない。

1.3.2 単位面積あたりの輻射力

輻射の基礎知識の情報から、直方体 L' に加わる単位面積当たりの輻射力を計算する。また、輻射力は吸収のみとする。以下の図 1.5 のような物理の状況設定とする。

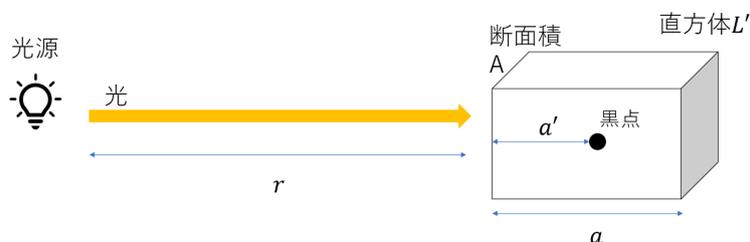


図 1.5 単位面積当たりの輻射力を求める時の物理状況

r は光源と直方体 L' までの距離、 A は直方体 L' の断面積、 a は直方体 L' の奥行の長さ、 a' は黒点が

ら直方体 L' の左側面までの距離を表す。 $r \gg a, r^2 \gg A$ と設定する。直方体 L' の中に密度 $\rho = const$ 、速度 $v = 0[cm/s]$ の金属元素のガスがあるとし、直方体 L' の外側は真空とする。

図の中にある黒点の単位体積あたりの輻射力 $[f_{rad}]$ は以下のように書ける。

$$[f_{rad}] = \left(\frac{\rho}{c}\right) \left(\frac{1}{4\pi r^2} \int_0^\infty \kappa_\nu L_\nu \exp(-\rho \kappa_\nu a') d\nu\right) \quad (1.16)$$

L_ν は直方体 L' を通過する前の単位振動数当たりの光度で、振動数に対して一定とする。

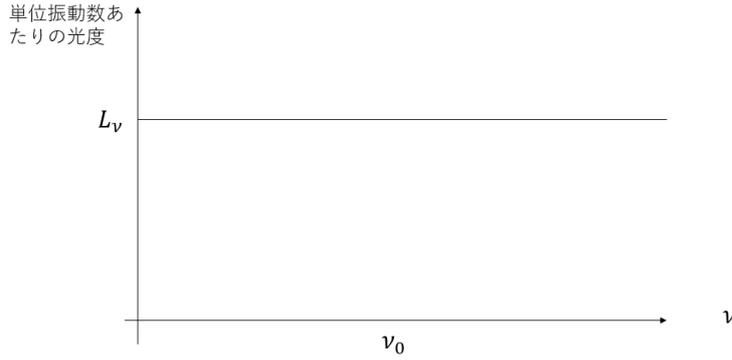


図 1.6 直方体 L' を通過する前の単位振動数当たりの光度の分布

$\kappa_\nu = \kappa_{full} \phi_\nu(\nu_0)$ とし、 $\phi_\nu(\nu_0)$ は矩形型ドップラープロファイルを表す。プロファイル関数は「1.2.4 プロファイル関数」に書いてある。 κ_{full} は定数とする。直方体 L' に加わる単位面積あたりの輻射力 $\langle f_{rad} \rangle$ は以下のように計算できる。

$$\langle f_{rad} \rangle = \int_0^a [f_{rad}] da' \quad (1.17)$$

$$= \int_0^a \left(\frac{\rho}{c}\right) \left(\frac{1}{4\pi r^2} \int_0^\infty \kappa_\nu L_\nu \exp(-\rho \kappa_\nu a') d\nu\right) da' \quad (1.18)$$

$$= \left(\frac{1}{c}\right) \left(\frac{\rho \kappa_{full}}{2\Delta\nu_D}\right) \left(\frac{1}{4\pi r^2}\right) \int_0^a \left(\int_{\nu_0 - \Delta\nu_D}^{\nu_0 + \Delta\nu_D} L_\nu \exp\left(-\rho \frac{\kappa_{full}}{2\Delta\nu_D} a'\right) d\nu\right) da' \quad (1.19)$$

$$= \left(\frac{1}{c}\right) \left(\frac{\rho \kappa_{full}}{2\Delta\nu_D}\right) \left(\frac{1}{4\pi r^2}\right) (2\Delta\nu_D) \int_0^a L_\nu \exp\left(-\rho \frac{\kappa_{full}}{2\Delta\nu_D} a'\right) da' \quad (1.20)$$

$$= \left(\frac{1}{c}\right) \left(\frac{\rho \kappa_{full}}{2\Delta\nu_D}\right) \left(\frac{1}{4\pi r^2}\right) (2\Delta\nu_D) L_\nu \left[-\left(\rho \frac{\kappa_{full}}{2\Delta\nu_D}\right)^{-1} \exp\left(-\rho \frac{\kappa_{full}}{2\Delta\nu_D} a'\right)\right]_0^a \quad (1.21)$$

$$= \left(\frac{1}{c}\right) \left(\frac{1}{4\pi r^2}\right) (2\Delta\nu_D) (L_\nu) (1 - \exp\left(-\rho \frac{\kappa_{full}}{2\Delta\nu_D} a\right)) \quad (1.22)$$

$$\rightarrow \langle f_{rad} \rangle = \left(\frac{1}{c}\right) \left(\frac{1}{4\pi r^2}\right) (2\Delta\nu_D) (L_\nu) (1 - \exp\left(-\rho \frac{\kappa_{full}}{2\Delta\nu_D} a\right)) \quad (1.23)$$

(1.23) の計算結果を物理的に考察する。直方体 L' を通過した後の単位振動数あたりの光度は振動数 $\nu_0 - \Delta\nu_D$ から $\nu_0 + \Delta\nu_D$ の間を $\exp\left(-\rho \frac{\kappa_{full}}{2\Delta\nu_D} a\right)$ の割合で減光しているので、以下の図 1.7 のように書くことができる。

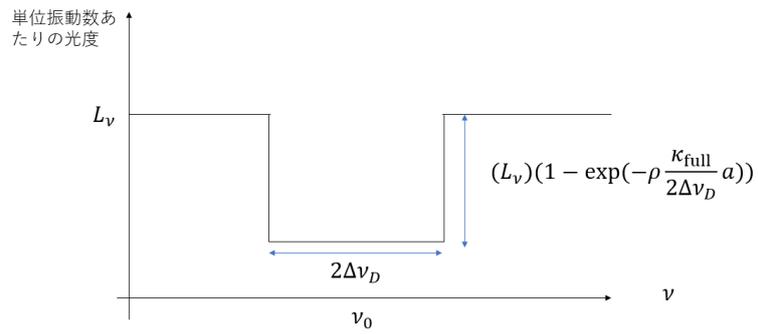


図 1.7 直方体 L' を通過した後の単位振動数あたりの光度の分布

(1.23) と図 1.7 から、直方体 L' で吸収された光度 $(2\Delta\nu_D)(L_\nu)(1 - \exp(-\rho \frac{\kappa_{\text{full}}}{2\Delta\nu_D} a))$ から直方体 L' に加わる輻射力が生成されていると解釈できる。つまり、この計算からラインフォースを確認することができる。

第 2 章

研究の背景と目的

2.1 研究背景

先行研究として Nomura et al 2021 を説明する。Nomura et al 2021 では軸対称 2 次元輻射流体計算を行って、ラインフォース駆動型円盤風の計算を行っている。実際の計算結果は以下の図である。

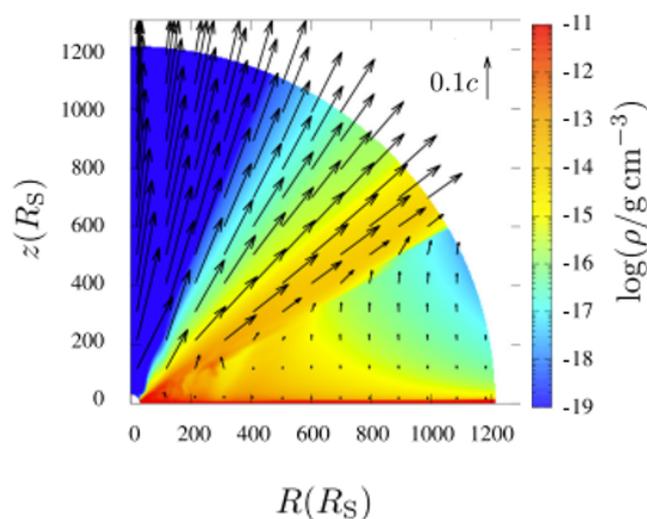


図 2.1 Nomura et al 2021 の計算結果

$z = 0$ の位置に標準円盤がおかれていて、原点の位置に 10^6 太陽質量の BH をおいて計算している。原点から斜め右方向にライン駆動型円盤風の発生を確認することができる。ただ、円盤は境界条件としているため、円盤の時間発展の計算は行っていない。

ライン駆動型円盤風ではラインフォースの評価がとても重要である。正しくラインフォースを評価しないと、観測結果と一致しなくなる。Nomura et al 2021 では、ラインフォースを計算するうえで、フォースマルチプレイヤーを使用している。

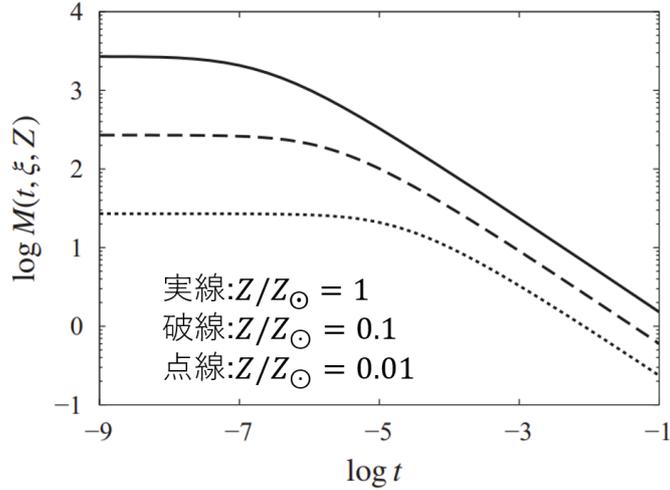


図 2.2 光学的厚みパラメータ t とフォースマルチプライヤー $M(t)$ の関係

t は光学的厚みのパラメータで、 $M(t)$ はフォースマルチプライヤーで、 Z_{\odot} は太陽の金属量で、 Z は円盤風の金属量である。 $\log(t) < -5$ の時の場合は、光学的に薄く、ほとんどすべての吸収線がラインフォースとして働くため、フォースマルチプライヤーは一定となる。一方、 $\log(t) > -5$ の時の場合は、光学的に厚く光子が吸収されて、ラインフォースの働かない吸収線も存在する。そのため、 t が増加するとフォースマルチプライヤーも減少する。金属量が増加するとフォースマルチプライヤーも増加する。なぜなら、金属量の散乱断面積が増え、ラインフォースに働く光子も増えるためである。

単位質量あたりの輻射力 f_{rad} としては、以下のように書くことができる。

$$f_{\text{rad}} = \frac{\kappa_{\text{es}}L}{4\pi r^2 c} + \frac{\kappa_{\text{es}}L}{4\pi r^2 c}(M(t)) \quad (2.1)$$

L は光度、 κ_{es} は電子散乱の不透明度、 r は動径方向の距離、 c は光速である。単位質量あたりの輻射力 f_{rad} の右辺第一項目は自由電子による散乱で、右辺第二項目はラインフォースを表している。つまり、自由電子の散乱による力から、フォースマルチプライヤーで約 10 から 10^3 倍増大した力がラインフォースとなる。これにより、円盤風を発生させる可能性がある。ただし、フォースマルチプライヤーは円盤風の速度勾配、密度、電離度、温度の簡単な関数で表されているため、ラインフォースを近似的に計算している。

2.2 研究目的

先行研究からの問題点は 2 つある。

- 輻射流体計算でライン駆動型円盤風の発生が確認されたが、肝心のラインフォースの評価に近似法 (フォースマルチプライヤー) が使われていた
- 円盤風の時間発展、円盤の時間発展それぞれの研究はなされてきたが、円盤風と円盤を同時に時間発展させて計算されていない

その 2 つの問題点を解決するために、修士論文としての目標は 2 つある。

- 軸対称 2 次元流体計算コードを MONACO コード (東大の小高氏作成) とリンクさせることで、ラインフォース駆動型円盤風を厳密に計算する
- 軸対称 2 次元流体計算コード + MONACO コード (軸対称 2 次元円盤風計算コード) と 1 次元の円盤計算コードを結合することにより、円盤風と円盤の時間発展を計算する

修士論文の目標のために、卒業論文の目標は 2 つある。

- 振動数依存型の球対称 1 次元輻射流体コードを作成する
- 簡易的な吸収モデルを用いて、ラインフォース駆動型アウロフローの定常構造を調べ、ラインフォースの特性を理解する

第 3 章

計算手法

3.1 基礎方程式

上から順番に連続の式、運動量保存の式、エネルギー保存の 3 式を使用する。

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ (\frac{v^2 \rho}{2} + \frac{P}{\gamma-1}) \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ (\frac{v^3 \rho}{2}) + P v \frac{\gamma}{\gamma-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2\rho v}{r} \\ \frac{2\rho v^2}{r} + \rho \frac{GM}{r^2} + \rho f_{\text{rad}} \\ \frac{2((\frac{v^3 \rho}{2}) + P v \frac{\gamma}{\gamma-1})}{r} + \rho v \frac{GM}{r^2} + \rho v f_{\text{rad}} \end{pmatrix} = \vec{0} \quad (3.1)$$

ρ は密度、 v は速度、 p は圧力、 γ は比熱比、 r は動径方向の距離、 t は時間、 f_{rad} は単位質量あたりに働く輻射力、 G は万有引力定数、 M は BH の質量である。3 つの方程式を計算をすることで、空間方向と時間方向の速度、密度、圧力の計算をする。計算方法としては、HLL 型リーマン近似を使用している。

単位質量あたりに働く輻射力 f_{rad} は以下のように計算する。

$$f_{\text{rad}} = \frac{1}{4\pi r^2 c} \int_0^\infty \kappa_\nu L_\nu \exp(-\tau_\nu) d\nu \quad (3.2)$$

ν は実験室系の振動数、 c は光速、 L_ν は光源の単位振動数当たりの光度、 $\tau_\nu (= \int^r \rho \kappa_\nu dr')$ は光学的厚みを表す。

3.2 モデルの説明

不透明度 κ_ν を 4 つのモデルとして置いた。

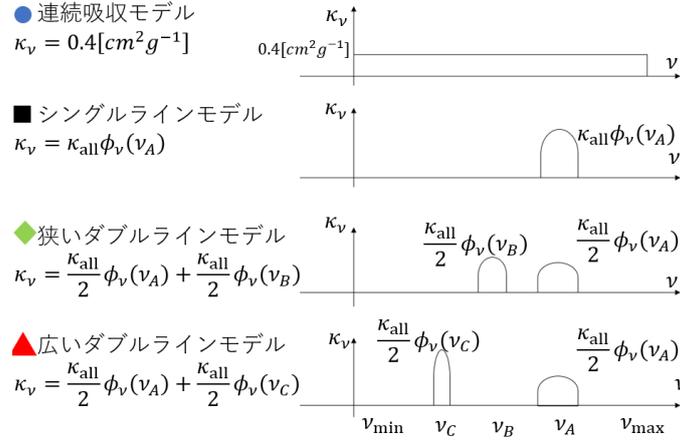


図 3.1 モデル 4 種類の説明

$\phi_\nu(\nu_A)$ は、 ν_A をラインセンターとするプロファイル関数を表す。プロファイル関数については、「1.2.4 プロファイル関数」に書いてある。

$\nu_{\min} = 1.76 \times 10^{15} [s^{-1}]$ 、 $\nu_{\max} = 3.00 \times 10^{15} [s^{-1}]$ 、 $\hat{\nu}_A = 2.27 \times 10^{15} [s^{-1}]$ 、 $\hat{\nu}_B = 2.01 \times 10^{15} [s^{-1}]$ 、 $\hat{\nu}_C = 1.82 \times 10^{15} [s^{-1}]$ 、 $\nu_A = (1 + \frac{v}{c})\hat{\nu}_A$ 、 $\nu_B = (1 + \frac{v}{c})\hat{\nu}_B$ 、 $\nu_C = (1 + \frac{v}{c})\hat{\nu}_C$ 、 $0.4(\nu_{\max} - \nu_{\min}) = \kappa_{\text{all}}$ としてモデルを設定する。

4つのモデルの定義から、ラインの幅の大きい順番は「連続吸収モデル」→「狭いダブルラインモデル」→「広いダブルラインモデル」→「シングルラインモデル」となる。

3.3 計算の状況設定

本計算を考察するために、テスト計算 1,2,3 を行う。以下では、本計算とテスト計算 1,2,3 の状況設定の説明をする。

3.3.1 本計算の状況設定

本計算の状況設定を説明する。

- 振動数依存型の球対称 1 次元輻射流体計算を行う。
- 使用するプログラミング言語は c++ である。
- BH の質量 $M = 10^5$ 太陽質量、比熱比 $\gamma = 1.4$ 、熱速度 $v_{\text{th}} = 5.0 \times 10^8 [cm/s]$ と設定する。
- 使用するプロファイル関数はガウス関数型ドップラープロファイルとする。
- 空間方向のグリッド数は 300、振動数方向のグリッド数を 50、空間方向にシミュレーションを行う範囲を $r = [10^2 R_s, 10^5 R_s]$ 、振動数空間にシミュレーションを行う範囲を $\nu = [\nu_{\min}, \nu_{\max}]$ と設定する。この時、 $R_s (= \frac{2GM}{c^2} = 2.96 \times 10^{10} [cm])$ はシュバルツシルト半径である。空間方向のグリッドのサイズは動径方向には指数関数的に増大するように設定し、振動数方向のグリッドのサイズは、 $\log(\nu)$ 空間を等間隔にするように設定する。
- 密度、速度、圧力の初期状態は、 $f_{\text{rad}} = \frac{\kappa_{\text{es}} 6L_{\text{Edd}}}{4\pi r^2 c}$ の定常解を初期条件とする。この定常解は、Appendix の輻射加速型 outflow(減光なし)の定常解と同じ。

- $r = 10^5 R_s$ の密度、速度、圧力の境界条件は自由端。 $r = 10^2 R_s$ の密度、速度、圧力の境界条件は $\rho = 5.5 \times 10^{-13} [g/cm^3]$ 、 $v = 6.7 \times 10^8 [cm/s]$ 、 $p = 2.2 \times 10^3 [dyn/cm^2]$ と設定する。
- $r = 100 R_s$ に入射する L_ν は $L_\nu = 4.58 \times 10^2 [erg]$ と一定とし、 $\int_{\nu_{\min}}^{\nu_{\max}} L_\nu d\nu = 6L_{\text{Edd}}$ と設定する。
- 「連続吸収モデル」、「シングルラインモデル」、「狭いダブルラインモデル」、「広いダブルラインモデル」を計算する。
- $t = 5.3 \times 10^5 [s]$ まで計算する。この時間は流体の約 1 タイムスケール t_{hyd} 分である。outflow であるので、ある距離 $10^5 R_s$ をある速度 $6.7 \times 10^9 [cm/s]$ で移動した時の時間を約 1 タイムスケールとした。以下のような計算式で求めた。 $t_{\text{hyd}} = \frac{10^5 R_s}{6.7 \times 10^9 [cm/s]} = 4.5 \times 10^5 [s]$

3.3.2 テスト計算 1,2,3 の状況設定

始めに、テスト計算 1、2、3 に共通する状況設定を説明する。

- 振動数依存型の輻射計算のみ行う。
- 使用するプログラミング言語は、Mathematica である。
- BH の質量、比熱比、熱速度は本計算と同じ。
- 使用するプロファイル関数は本計算と同じ。
- 空間方向のグリッド数は 100、空間方向にシミュレーションを行う範囲と振動数空間にシミュレーションを行う範囲は本計算と同じ。空間方向のグリッドのサイズは等間隔になるように設定する。振動数方向は関数として計算したため、グリッド数やグリッドサイズは存在しない。
- どの領域でも、 $\rho = 10^{-16} [g/cm^3]$ とする。
- $r = 100 R_s$ に入射する L_ν の物理状況は本計算と同じ。

次に、テスト計算 1、2、3 ごとの状況設定を説明する。

- テスト計算 1 は、 $v = 0 [cm/s]$ として「連続吸収モデル」、「シングルラインモデル」、「狭いダブルラインモデル」、「広いダブルラインモデル」を計算する。
- テスト計算 2 は、 $v = 5.4 \times 10^4 \frac{r}{R_s} [cm/s]$ として、「シングルラインモデル」を計算する。
- テスト計算 3 は、 $v = 5.4 \times 10^4 \frac{r}{R_s} [cm/s]$ として、「狭いダブルラインモデル」、「広いダブルラインモデル」を計算する。

第4章

本計算の結果と考察

4.1 本計算の結果

本計算の結果として $t = 4.4 \times 10^4 [s]$ の時の速度、密度、輻射力/重力の3つのグラフを載せる。

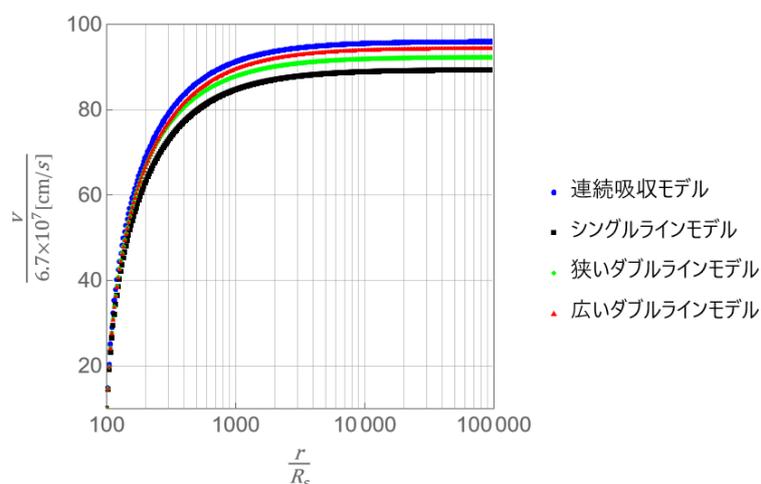


図 4.1 $t = 5.3 \times 10^5 [s]$ での速度 v の計算結果 (本計算)

どのモデルの場合でも、 $\frac{r}{R_s} = 10^2$ から $\frac{r}{R_s} = 10^3$ までの間で速度は増加し、 $\frac{r}{R_s} = 10^3$ から $\frac{r}{R_s} = 10^5$ までの間で速度は一定となっている。

また、速度は「連続吸収モデル」→「広いダブルラインモデル」→「狭いダブルラインモデル」→「シングルラインモデル」の順に小さくなる。

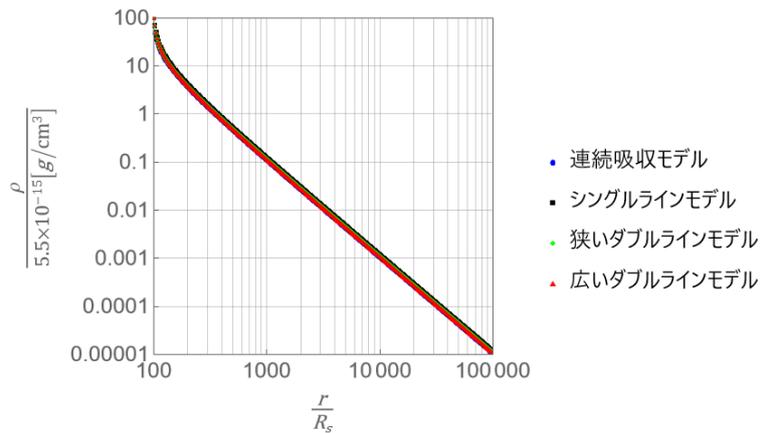


図 4.2 $t = 5.3 \times 10^5 [s]$ での密度 ρ の計算結果 (本計算)

どのモデルの場合でも、動径方向に対して密度は減少している。

また、密度は「連続吸収モデル」→「広いダブルラインモデル」→「狭いダブルラインモデル」→「シングルラインモデル」の順に大きくなる。

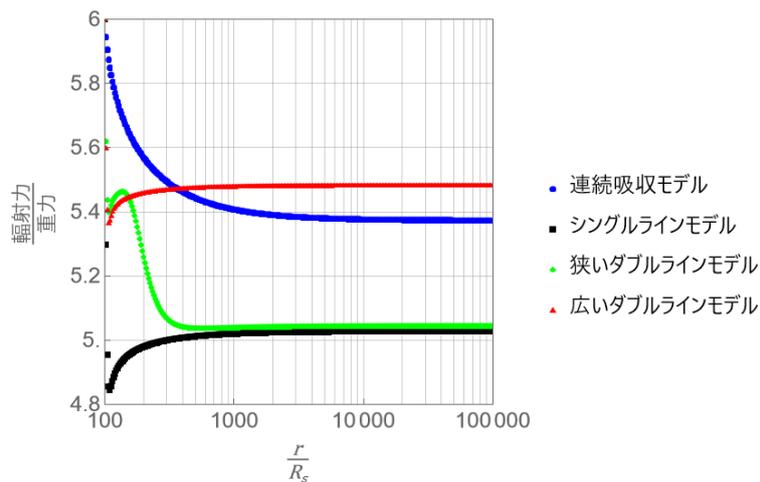


図 4.3 $t = 5.3 \times 10^5 [s]$ での輻射力/重力の計算結果 (本計算)

それぞれのモデルの輻射力/重力の増減を確認する。

- 「連続吸収モデル」 減少→一定
- 「シングルラインモデル」 減少→増加→一定
- 「狭いダブルラインモデル」 減少→増加→減少→一定
- 「広いダブルラインモデル」 減少→増加→一定

全てのモデルにおいて、遠方の領域の輻射力/重力は一定となっている。これは、光学的に薄くなるためである。光学的に薄い場合、光子の吸収が少量であるので、輻射力/重力は一定となる。遠方以外の領域の輻射力/重力の増減はテスト計算を用いて考察する。

次に、輻射力の強い順番で並べる。

- $\frac{r}{R_s} = [100, 200]$ 「連続吸収モデル」 → 「狭いダブルラインモデル」 → 「広いダブルラインモデル」 → 「シングルラインモデル」
- $\frac{r}{R_s} = [200, 400]$ 「連続吸収モデル」 → 「広いダブルラインモデル」 → 「狭いダブルラインモデル」 → 「シングルラインモデル」
- $\frac{r}{R_s} = [400, 10^5]$ 「広いダブルラインモデル」 → 「連続吸収モデル」 → 「狭いダブルラインモデル」 → 「シングルラインモデル」

動径方向の距離ごとに輻射力の強い順番は変わっている。輻射力の強さの順番はテスト計算を用いて考察する。

4.2 テスト計算と本計算の考察

以下では、テスト計算 1、2、3 から図 4.3 の内側領域の分布の考察をする。

4.2.1 テスト計算 1 と本計算の考察

輻射力/重力のグラフ (テスト計算 1) を載せる。

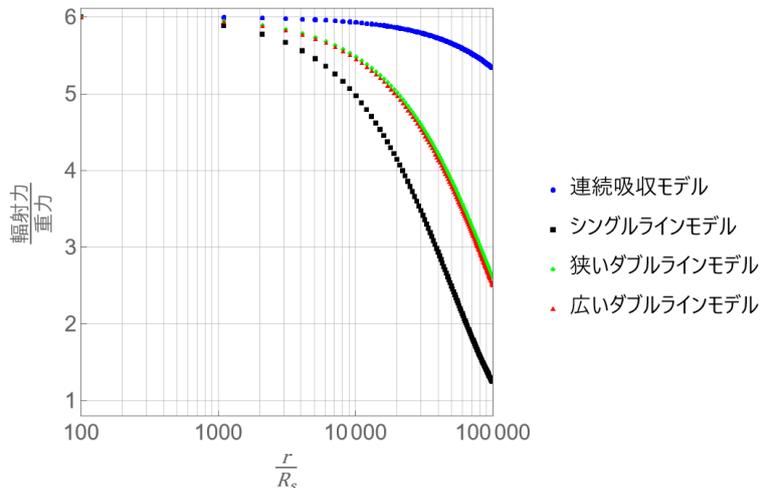


図 4.4 輻射力/重力の計算結果 (テスト計算 1)

図 4.4 から以下の 2 つのことがわかる。(*は自明)

- ラインの幅が広いほど輻射力は強くなる
- *同じ振動数の光子を吸収し続けると、外側領域の輻射力は減少する

プロファイル関数を矩形型ドップラープロファイルとして、テスト計算 1 のシングルラインモデルの単

位質量あたりの輻射力 f_{rad} を計算する。

$$f_{\text{rad}} = \frac{1}{4\pi r^2 c} \int_0^\infty \kappa_\nu L_\nu \exp(-\tau_\nu) d\nu \quad (4.1)$$

$$= \frac{1}{4\pi r^2 c} \left(\frac{\kappa_{\text{all}}}{2\Delta\nu_D} \right) \left(\int_{\nu_A - \Delta\nu_D}^{\nu_A + \Delta\nu_D} L_\nu \exp\left(-\rho \frac{\kappa_{\text{all}}}{2\Delta\nu_D} r\right) d\nu \right) \quad (4.2)$$

$$= \frac{\kappa_{\text{all}}}{4\pi r^2 c} L_\nu \exp\left(-\rho \frac{\kappa_{\text{all}}}{2\Delta\nu_D} r\right) \quad (4.3)$$

$$\rightarrow f_{\text{rad}} = \frac{\kappa_{\text{all}}}{4\pi r^2 c} L_\nu \exp\left(-\rho \frac{\kappa_{\text{all}}}{2\Delta\nu_D} r\right) \quad (4.4)$$

(4.4) から、幅の広がり $\Delta\nu_D$ の大きいほど、単位質量あたりの輻射力は強くなる。

また、定性的に考えてもラインの幅によって輻射力の強さを判断できる。 $\int \kappa_\nu d\nu = \text{const}$ としたとする。ラインの幅を2倍にしたとしても同じ振動数の光子を吸収する割合は0.5倍よりも大きくなる。なぜなら、減光する割合は指数関数的に減少するためである。結果的に光子の吸収量が増え、輻射力は増加する。定性的に考えても、幅の広いラインの輻射力は強くなる。

テスト計算1をまとめる。

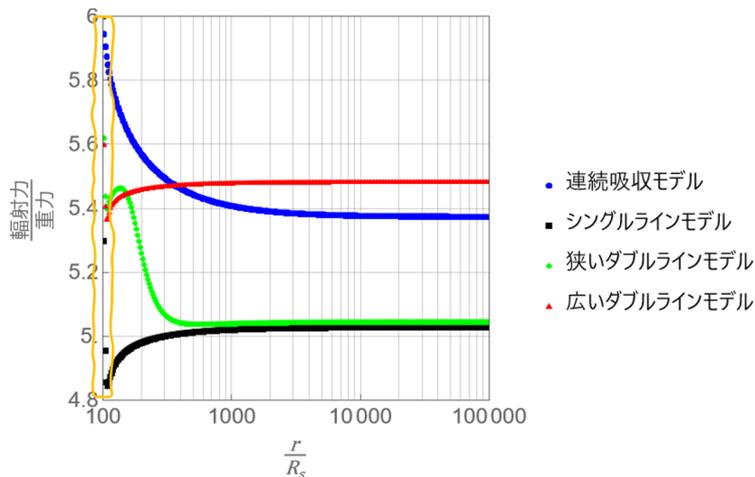


図 4.5 $t = 5.3 \times 10^5$ [s] での輻射力/重力の計算結果 (本計算)

テスト計算1の計算結果から、本計算の図 4.5 の黄色枠は、ラインの幅が広いほど輻射力は強くなることによって説明できる。

4.2.2 テスト計算2と本計算の考察

シングルラインモデルの輻射力/重力のグラフ (テスト計算1、2)、シングルラインモデルの $\frac{r}{R_s}$ ごとの単位振動数あたりの光度の分布のグラフ (テスト計算2) を載せる。

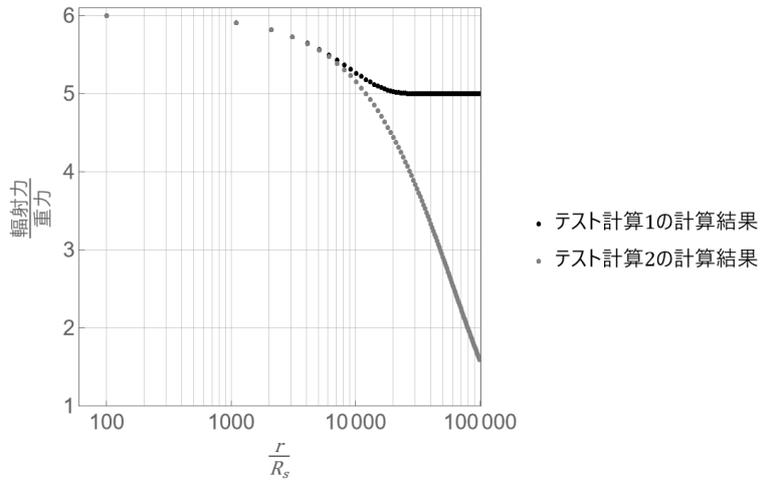


図 4.6 シングルラインモデルの輻射力/重力の比較 (テスト計算 1、2)

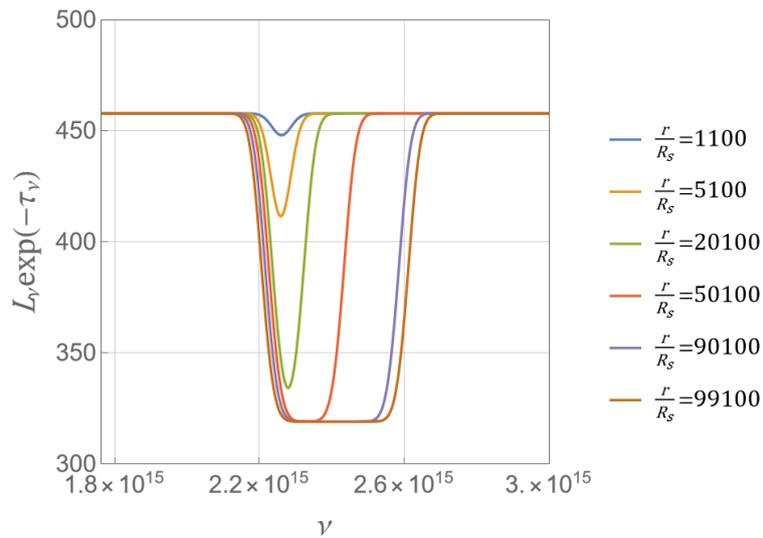


図 4.7 シングルラインモデルの $\frac{r}{R_s}$ ごとの単位振動数あたりの光度の分布 (テスト計算 2)

図 4.6、図 4.7 から以下のことがわかる。

- 速度勾配により遠方でも輻射力/重力が一定になる (連続吸収とは異なる)

図 4.6、図 4.7 の $\frac{r}{R_s} = [10^2, 10^4]$ では、同じ振動数の光子を吸収するので、遠方ほど輻射力が下がる。一方、図 4.6、図 4.7 の $\frac{r}{R_s} = [10^4, 10^5]$ では、速度勾配により内側で吸収されていない高振動数の光子を吸収できるようになるため、輻射力/重力は一定となる。つまり、速度勾配によって、遠方でも輻射力/重力が一定となっている。

ただ、本計算の図 4.3 の 3 つのラインモデルの輻射力/重力は増加している。

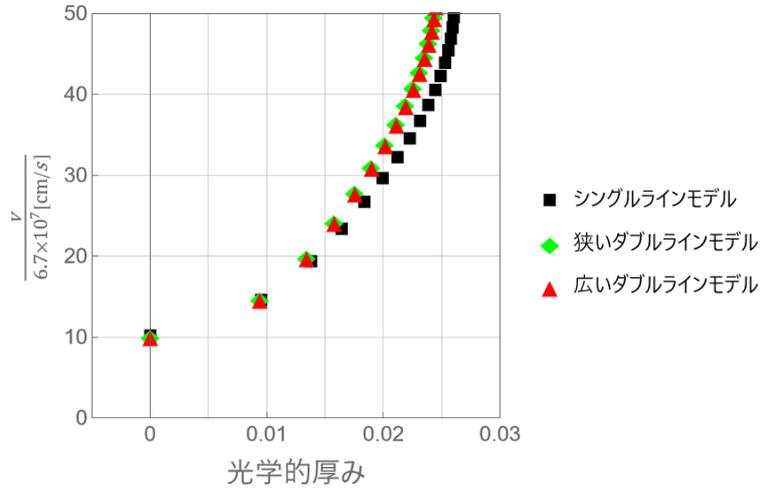


図 4.8 本計算での光学的厚みと速度の関係

テスト計算 2 の場合だと、速度は光学的厚みに比例となっていたため、輻射力/重力は一定となっていた。図 4.8 からわかるように、本計算では速度が光学的厚みの約 2 乗なので、遠方に行くほど輻射力/重力は増加すると考えられる。理由は、内側で吸収されていない高振動数の光子をより効果的に吸収するためである。

速度差と熱的広がりから、輻射力/重力が増加し (一定となり) 始める動径方向の距離を見積もることができる。動径方向の距離の見積もりと計算結果の比較を行う。

始めに、輻射力/重力が一定となり始める動径方向の距離を見積もる (テスト計算 2)。プロファイル関数の熱的広がり Δr は $5.0 \times 10^8 [cm/s]$ で、 $\frac{r}{R_s} = 100$ での速度は $v = 0 [cm/s]$ であるので、速度が $10.0 \times 10^8 [cm/s]$ を超えるあたりから輻射力/重力は一定となる。テスト計算 2 での速度は、 $v = 5.4 \times 10^4 \frac{r}{R_s} [cm/s]$ と決まっていたので、輻射力/重力の一定となり始める動径方向の距離は以下のようにして見積もることができる。

$$5.4 \times 10^4 \frac{r}{R_s} [cm/s] = 10.0 \times 10^8 [cm/s] \quad (4.5)$$

$$\rightarrow \frac{r}{R_s} = 1.9 \times 10^4 \quad (4.6)$$

図 4.6 で輻射力/重力一定となり始めた動径方向の距離は $\frac{r}{R_s} = 2 \times 10^4$ と読み取れる。見積もりでの動径方向の距離 (4.6) と計算結果の動径方向の距離は等しいと判断できる。

次に、輻射力/重力が増加し始める動径方向の距離を見積もる (本計算)。プロファイル関数の熱的広がり Δr は $5.0 \times 10^8 [cm/s]$ で、 $\frac{r}{R_s} = 100$ での速度は $v = 6.7 \times 10^8 [cm/s]$ であるので、速度が $16.7 \times 10^8 [cm/s] (\frac{v}{6.7 \times 10^7 [cm/s]} = 25)$ を超えるあたりから輻射力/重力は増加する。本計算の図 4.1 から、 $\frac{r}{R_s} = 110$ を超えるあたりから輻射力/重力が増加すると見積もることができる。本計算の図 4.3 内で輻射力/重力が増加し始めた動径方向の距離は $\frac{r}{R_s} = 110$ と読み取れる。見積もりでの動径方向の距離と計算結果の動径方向の距離は等しいと判断できる。

つまり、本計算の輻射力/重力の増加は、速度勾配によるものだと確認できる。

テスト計算 2 をまとめる。

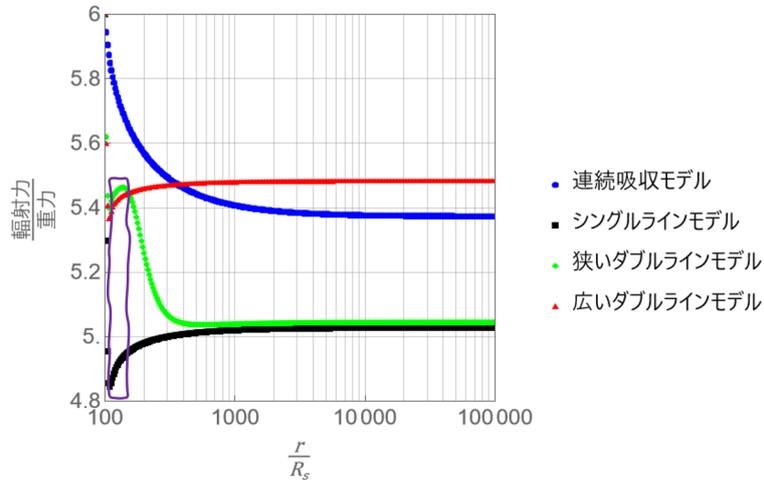


図 4.9 $t = 5.3 \times 10^5 [s]$ での輻射力/重力の計算結果 (本計算)

テスト計算 2 の計算結果から、本計算の図 4.9 の紫色枠は、速度勾配により遠方でも輻射力/重力が増加する (連続吸収とは異なる) ことによって説明できる。

4.2.3 テスト計算 3 と本計算の考察

狭いダブルラインモデルと広いダブルラインモデルの輻射力/重力のグラフ (テスト計算 3)、狭いダブルラインモデルとライン一本ずつの輻射力/重力のグラフ (テスト計算 3)、狭いダブルラインモデルの $\frac{r}{R_s}$ ごとの単位振動数あたりの光度の分布のグラフ (テスト計算 3) を載せる。

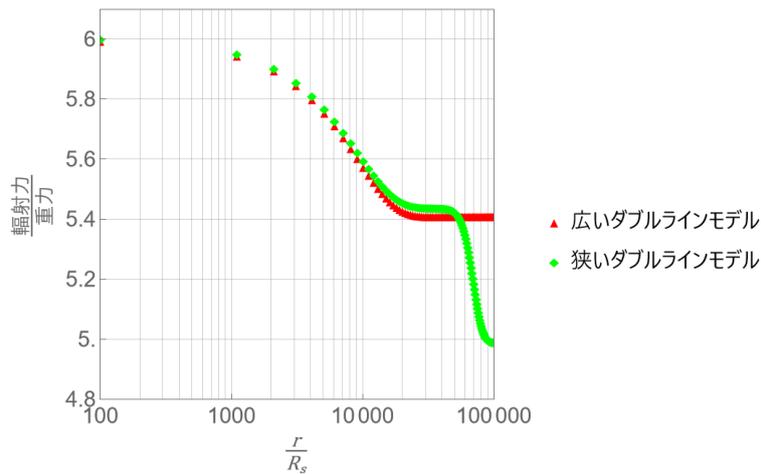


図 4.10 狭いダブルラインモデルと広いダブルラインモデル輻射力/重力の比較 (テスト計算 3)

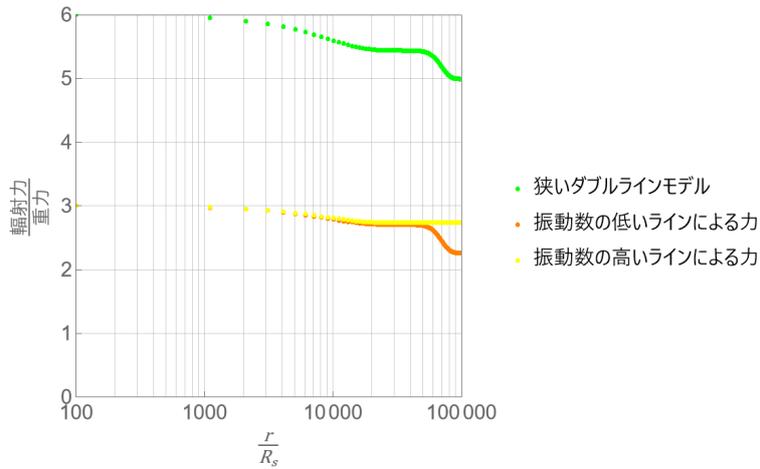


図 4.11 狭いダブルラインモデルとライン一本ずつの輻射力/重力の比較 (テスト計算 3)

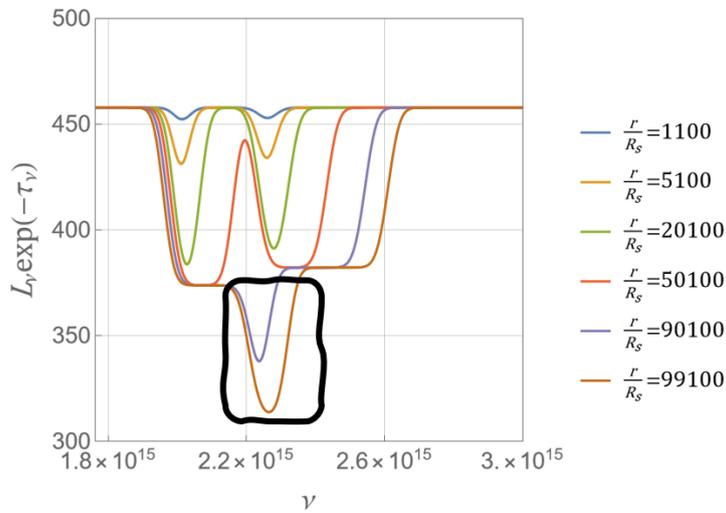


図 4.12 狭いダブルラインモデルの $\frac{r}{R_s}$ ごとの単位振動数あたりの光度の分布 (テスト計算 3)

図 4.10、図 4.11。図 4.12 から以下のことがわかる。

- ラインの重なり効果によって輻射力が減少する

図 4.10 内の狭いダブルラインモデルは $\frac{r}{R_s} = 7 \times 10^4$ で減少している。図 4.11 で、ライン一本ずつの輻射力をグラフから読み取ると、振動数の低いラインによる力が $\frac{r}{R_s} = 7 \times 10^4$ で減少している。図 4.12 内の黒色枠では振動数の高いラインによる減光により、振動数の低いラインによる力が弱くなっている。つまり、ラインの重なりによって輻射力が減少している。

速度差と狭いダブルラインモデルの 2 本のラインの間の振動数から、輻射力が減少し始める動径方向の距離を見積もることができる。輻射力が減少し始める動径方向の距離の見積もりと計算結果の比較を

行う。

始めに、テスト計算 3 での動径方向の距離の見積もりを行う。狭いダブルラインモデルの 2 本のラインの間の振動数は $0.26 \times 10^{15} [s^{-1}]$ となる。 $0.26 \times 10^{15} [s^{-1}]$ の振動数は速度が $3.88 \times 10^9 [cm/s]$ のドップラーシフト分に相当する。 $\frac{r}{R_s} = 100$ での速度は $v = 0 [cm/s]$ であるので、速度が $3.88 \times 10^9 [cm/s]$ を超えるあたりから輻射力は減少する。テスト計算 3 での速度は、 $v = 5.4 \times 10^4 \frac{r}{R_s} [cm/s]$ と決まっていたので、輻射力が減少し始める動径方向の距離は以下のようにして見積もることができる。

$$5.4 \times 10^4 \frac{r}{R_s} [cm/s] = 3.88 \times 10^9 [cm/s] \quad (4.7)$$

$$\rightarrow \frac{r}{R_s} = 7.2 \times 10^4 \quad (4.8)$$

図 4.10 内で輻射力が減少し始めた動径方向の距離は $\frac{r}{R_s} = 7 \times 10^4$ と読み取れる。見積もりでの動径方向の距離 (4.8) と計算結果の動径方向の距離は等しいと判断できる。

次に、テスト計算 3 での動径方向の距離の見積もりを行う。狭いダブルラインモデルの 2 本のラインの間の振動数は $0.26 \times 10^{15} [s^{-1}]$ となる。 $0.26 \times 10^{15} [s^{-1}]$ の振動数は速度が $3.88 \times 10^9 [cm/s]$ のドップラーシフト分に相当する。 $\frac{r}{R_s} = 100$ での速度は $v = 6.7 \times 10^8 [cm/s]$ であるので、速度が $4.55 \times 10^9 [cm/s]$ ($\frac{v}{6.7 \times 10^8 [cm/s]} = 68$) を超えるあたりから輻射力は減少する。本計算の図 4.1 から、 $\frac{r}{R_s} = 200$ を超えるあたりから輻射力が減少すると見積もることができる。本計算の図 4.3 内で輻射力が減少し始めた動径方向の距離は $\frac{r}{R_s} = 200$ と読み取れる。見積もりでの動径方向の距離と計算結果の動径方向の距離は等しいと判断できる。

つまり、本計算でもラインの重なりによる輻射力の減少が存在する。

テスト計算 3 をまとめる。

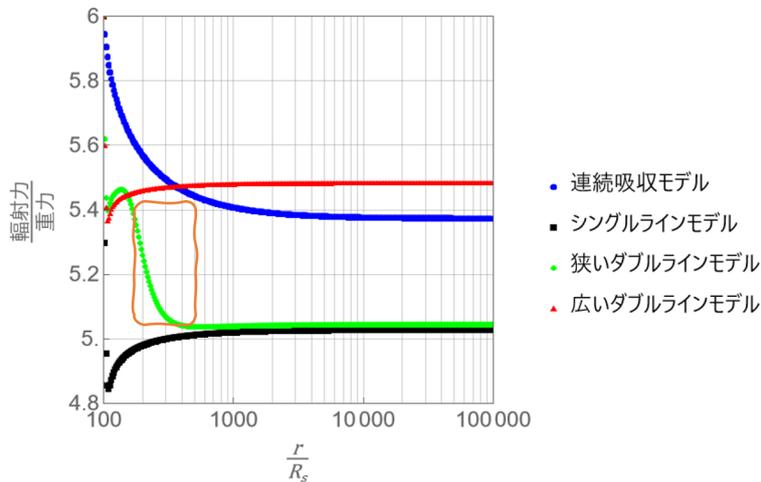


図 4.13 $t = 5.3 \times 10^5 [s]$ での輻射力/重力の計算結果 (本計算)

テスト計算 3 の計算結果から、本計算の図 4.13 のオレンジ色枠は、ラインの重なり効果により輻射力が減少することによって説明できる。

第5章

まとめと結論

振動数依存型の球対称1次元輻射流体コードを作成した。その計算コードから簡易的な吸収モデル4つを計算した。 $t = 5.3 \times 10^5 [s]$ での輻射力/重力の結果から考察を行った。

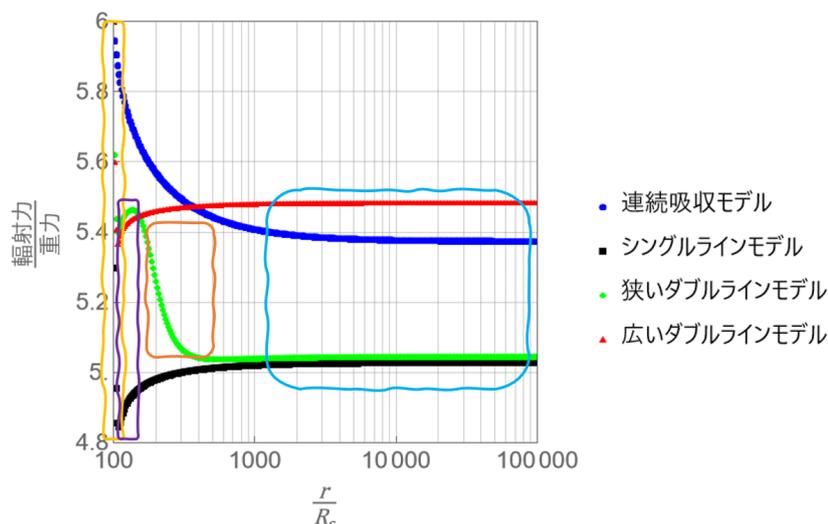


図 5.1 $t = 5.3 \times 10^5 [s]$ での輻射力/重力の計算結果

図 5.1 は以下の情報で全て説明することができる。(*自明)

- 「黄色枠」
ラインの幅が広いほど輻射力は強くなる
*同じ振動数の光子を吸収し続けると、外側領域の輻射力は減少する
- 「紫色枠」
速度勾配により遠方でも輻射力/重力が増加する (連続吸収とは異なる)
- 「オレンジ色枠」
ラインの重なり効果により輻射力が減少する
- 「水色枠」
*光学的に薄い領域では輻射力/重力は一定になる

参考文献

- [1] 福江純, 和田桂一, 梅村雅之, 2014 年, 「宇宙流体力学の基礎 (日本評論社)」
- [2] Shoji Kato, Jun Fukue, Shin Mineshige, 2008, 「Black-Hole Accretion Disks (Kyoto University Press)」
- [3] 梅村雅之, 福江純, 野村英子, 2016 年, 「輻射輸送と輻射流体力学 (日本評論社)」
- [4] 嶺重慎, 2016 年, 「ブラックホール天文学 (日本評論社)」
- [5] 神部勉, 2014 年, 「流体力学 (裳華房)」
- [6] 神部勉, 2019 年, 「基礎演習シリーズ 流体力学 (裳華房)」
- [7] 富阪幸治, 花輪知幸, 牧野淳一郎, 2009 年, 「シリーズ 現代の天文学 シミュレーション天文学 (日本評論社)」
- [8] 藤井孝蔵, 2010 年, 「流体力学の数値計算法 (日本評論社)」
- [9] 大須賀健, 2019 年, 「ゼロからわかるブラックホール (BLUE BACKS)」
- [10] Nomura M., Omukai K., Ohsuga K., 2021, MNRAS, 507, 904
- [11] Nomura M., Ohsuga K., Takahashi H. R., Wada K., Yoshida T., 2016, PASJ, 68, 16
- [12] Proga D., Stone J. M., Kallman T. R., 2000, ApJ, 543, 686
- [13] Proga D., Kallman T. R., 2004, ApJ, 616, 688

謝辞

本卒業論文を作成するにあたり、指導教官である大須賀健教授にはご多忙の中、多くの力添えをしていただきました。研究の基本的な取り組み方、計算結果の考察のやり方、プレゼン資料の作り方など多くのことを指導していただきました。とくに、12月下旬と1月上旬には、私の卒業研究の考察がまとまっていなかったため、お時間ない中で多くの議論をしていただきました。心から感謝申し上げます。高橋博之さんには、衝撃波管問題のコードをいただきました。卒業研究をスムーズにスタートすることができました。本当にありがとうございました。

最後に、卒業研究をするにあたって支えてくださった家族、お互いに切磋琢磨した友人の方々に心から感謝申し上げます。

第 6 章

Appendix

「Bondi 降着」、「輻射加速型 outflow(減光なし)」の計算結果と定常解の求め方を載せる。

6.1 Bondi 降着

6.1.1 基礎方程式

上から順番に連続の式、運動量保存の式、エネルギー保存の式の 3 式を計算する。

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ (\frac{v^2 \rho}{2} + \frac{P}{\gamma-1}) \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ (\frac{v^3 \rho}{2}) + P v \frac{\gamma}{\gamma-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2\rho v}{r} \\ \frac{2\rho v^2}{r} + \rho \frac{GM}{r^2} \\ \frac{2((\frac{v^3 \rho}{2}) + p v \frac{\gamma}{\gamma-1})}{r} + \rho v \frac{GM}{r^2} \end{pmatrix} = \vec{0} \quad (6.1)$$

ρ は密度、 v は速度、 p は圧力、 γ は比熱比、 r は動径方向の距離、 t は時間、 G は万有引力定数、 M は BH の質量である。3 つの方程式を計算をすることで、空間方向と時間方向の速度、密度、圧力の計算をする。計算方法としては、HLL 型リーマン近似を使用している。

6.1.2 Bondi 降着の状況設定

Bondi 降着の計算の状況設定を説明する。

- 球対称 1 次元流体計算を行う。
- 使用するプログラミング言語は c++ である。
- BH の質量 $M = 10^5$ 太陽質量、比熱比 $\gamma = 1.4$ と設定する。
- 空間方向のグリッド数は 300、空間方向にシミュレーションを行う範囲を $r = [10^2 R_s, 10^5 R_s]$ と設定する。この時、 $R_s (= \frac{2GM}{c^2} = 2.96 \times 10^{10} [cm])$ はシュバルツシルト半径である。空間方向のグリッドのサイズは動径方向には指数関数的に増大するように設定する。
- 密度、速度、圧力の初期条件は、Bondi 降着の定常解とする。Bondi 降着の定常解の求め方は、下に書いている。
- $r = 10^2 R_s$ の密度、速度、圧力の境界条件は自由端。 $r = 10^5 R_s$ の密度、速度、圧力の境界条件は $\rho = 2.0 \times 10^{-15} [g/cm^3]$ 、 $v = -3.5 \times 10^7 [cm/s]$ 、 $p = 4.9 [dyn/cm^2]$ と設定。
- $t = 4.4 \times 10^7 [s]$ まで計算する。この時間は流体の約 1 タイムスケール t_{hyd} 分である。Bondi 降着は重力が優勢である。力は重力のみとし、タイムスケールを考えた。以下のような計算式で求めた。

$$\frac{D^2 r}{Dt^2} = \frac{GM}{r^2} \rightarrow t_{\text{hyd}} = \sqrt{\frac{(10^5 R_s)^3}{GM}} = 4.5 \times 10^7 [s]$$

6.1.3 計算結果

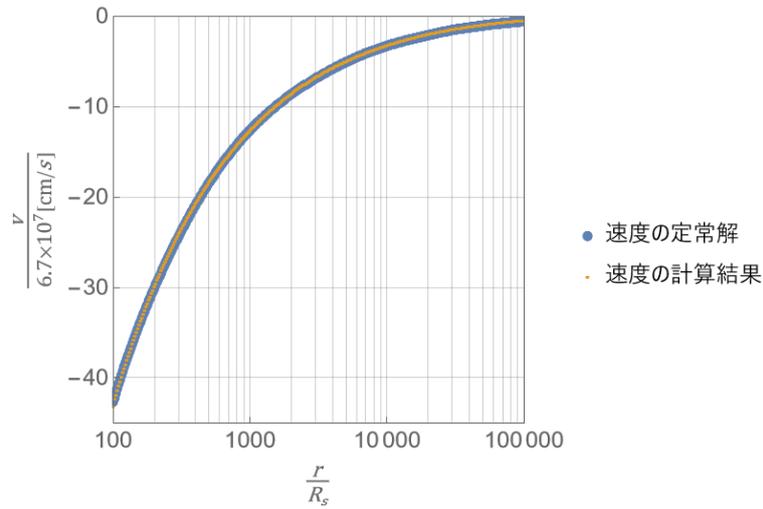


図 6.1 $t = 4.4 \times 10^7 [s]$ での速度 v の計算結果

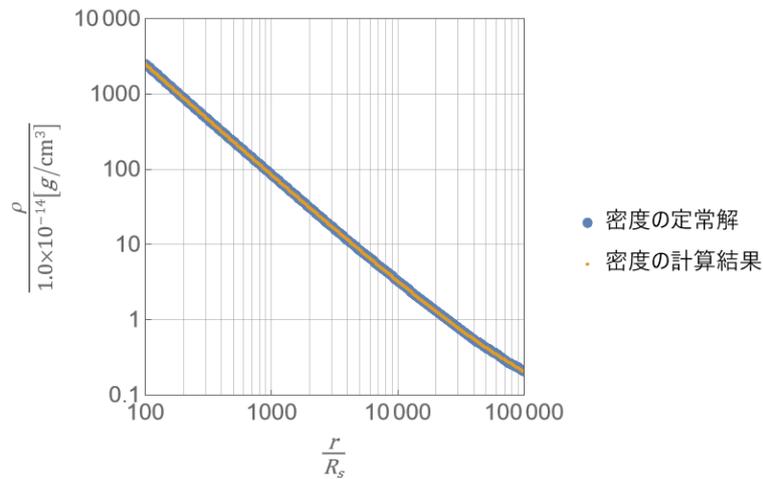


図 6.2 $t = 4.4 \times 10^7 [s]$ での密度 ρ の計算結果

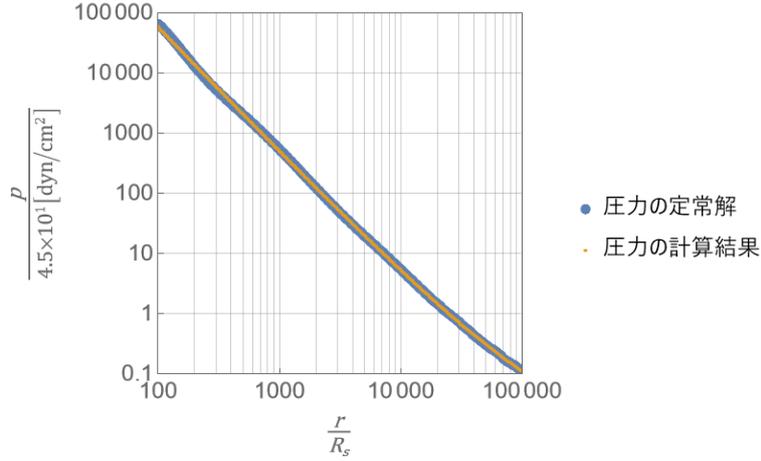


図 6.3 $t = 4.4 \times 10^7 [s]$ での圧力 p の計算結果

速度、密度、圧力すべてにおいて計算結果と定常解が一致した。

6.1.4 Bondi 降着の定常解の求め方

Bondi 降着の定常解を求めるときは、上から順に質量保存の式、ベルヌーイの方程式、ポリトロピック関係式を使用する。

$$-4\pi r^2 v \rho = \dot{M} \quad (6.2)$$

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} - \frac{GM}{r} = E \quad (6.3)$$

$$p = K \rho^\gamma \quad (6.4)$$

\dot{M} は質量降着率、 E はベルヌーイ定数、 K は定数である。(6.2),(6.3),(6.4) から、遷音速半径 r_c 、遷速度 v_c の関係式 (6.5),(6.6),(6.7) を計算することができる。

$$r_c = \frac{GM}{2c_s^2} = \frac{(5-3\gamma)GM}{4(\gamma-1)E} \quad (6.5)$$

$$4\pi r_c^2 (|v_c|)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} = (K\gamma)^{\frac{1}{\gamma-1}} \dot{M} \quad (6.6)$$

$$v_c^2 = \frac{2E(\gamma-1)}{5-3\gamma} \quad (6.7)$$

$c_s (= \frac{dp}{d\rho})$ は音速である。(6.5),(6.6),(6.7) の関係式を満たすような \dot{M}, E, K でないと遷音速解にならない。(6.5),(6.6),(6.7) から r_c, v_c を消去して、 \dot{M}, E, K のみの関係式は以下ようになる。

$$(K\gamma)^{\frac{1}{\gamma-1}} \dot{M} = \pi(GM)^2 \left(\frac{2(\gamma-1)}{5-3\gamma} E \right)^{\frac{(5-3\gamma)}{2(\gamma-1)}} \quad (6.8)$$

今回の定常解を求めるときは、 $K = 1, E = 1 [cm^2/s^2]$ と置き、(6.8) の式を使用して \dot{M} の数値を決定した。(6.2),(6.3),(6.4) から速度と音速の関係式 2 式は以下ようになる。

$$\frac{v^2}{2} + \frac{c_s^2}{\gamma-1} - \frac{GM}{r} = E \quad (6.9)$$

$$-4\pi v r^2 (c_s)^{\frac{2}{\gamma-1}} = (K\gamma)^{\frac{1}{\gamma-1}} \dot{M} \quad (6.10)$$

(6.9),(6.10) を満たすような速度と音速を r ごとに計算する。Bondi 降着であるので、 $r_c > r$ の時は超音速解、 $r_c < r$ の時は亜音速解を選択する。 $r_c = r$ の時は $v = c_s$ となっているので、選択する必要はない。計算で求めた速度から (6.2),(6.3) を使用すれば、密度、圧力が求まる。

一般的に Bondi 降着の定常解を求めるときは、風方程式 (6.11) を計算する。

$$(v^2 - c_s^2) \frac{1}{v} \frac{dv}{dr} = \frac{2c_s^2}{r} - \frac{GM}{r^2} \quad (6.11)$$

(6.11) からわかるように遷音速の時、風方程式を解くことができない。そのため、Bondi 降着の定常解を計算するときは、上記の方法の方が安定して計算できる。

Bondi 降着の定常解の計算を応用をすると太陽風の定常解も計算することができる。太陽風の定常解を計算するときは、 $r_c < r$ の時は超音速解、 $r_c > r$ の時は亜音速解を選択すればよい。

6.2 輻射加速型 outflow(減光なし)

6.2.1 基礎方程式

上から順番に連続の式、運動量保存の式、エネルギー保存の式の3式を計算する。

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ \left(\frac{v^2 \rho}{2} + \frac{P}{\gamma-1}\right) \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ \left(\frac{v^3 \rho}{2}\right) + P v \frac{\gamma}{\gamma-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2\rho v}{r} \\ \frac{2\rho v^2}{r} + \rho \frac{GM}{r^2} + \rho \frac{\kappa_{es} 6L_{\text{Edd}}}{4\pi r^2 c} \\ \frac{2\left(\frac{v^3 \rho}{2}\right) + p v \frac{\gamma}{\gamma-1}}{r} + \rho v \frac{GM}{r^2} + \rho v \frac{\kappa_{es} 6L_{\text{Edd}}}{4\pi r^2 c} \end{pmatrix} = \vec{0} \quad (6.12)$$

ρ は密度、 v は速度、 p は圧力、 γ は比熱比、 r は動径方向の距離、 t は時間、 G は万有引力定数、 M は BH の質量、 κ_{es} は電子散乱の不透明度である。3つの方程式を計算をすることで、空間方向と時間方向の速度、密度、圧力の計算をする。計算方法としては、HLL 型リーマン近似を使用している。

6.2.2 輻射加速型 outflow(減光なし) の状況設定

輻射加速型 outflow(減光なし) の状況設定を説明する。

- 球対称 1 次元輻射流体計算を行う。
- 使用するプログラミング言語は c++ である。
- BH の質量 $M = 10^5$ 太陽質量、比熱比 $\gamma = 1.4$ と設定する。
- 空間方向のグリッド数は 3000、空間方向にシミュレーションを行う範囲を $r = [10^2 R_s, 10^5 R_s]$ と設定する。この時、 $R_s (= \frac{2GM}{c^2} = 2.96 \times 10^{10} [cm])$ はシュバルツシルト半径である。空間方向のグリッドのサイズは動径方向には指数関数的に増大するように設定する。
- 密度、速度、圧力の初期条件は、輻射加速型 outflow(減光なし) の定常解とする。輻射加速型 outflow(減光なし) の定常解の求め方は、下に書いている。
- $r = 10^5 R_s$ の密度、速度、圧力の境界条件は自由端。 $r = 10^2 R_s$ の密度、速度、圧力の境界条件は $\rho = 5.0 \times 10^{-13} [g/cm^3]$ 、 $v = 6.7 \times 10^8 [cm/s]$ 、 $p = 2.2 \times 10^3 [dyn/cm^2]$ と設定。
- $t = 4.4 \times 10^5 [s]$ まで計算する。この時間は流体の約 1 タイムスケール t_{hyd} 分である。outflow であるので、ある距離 $10^5 R_s$ をある速度 $6.7 \times 10^9 [cm/s]$ で移動した時の時間を約 1 タイムスケールとした。以下のような計算式で求めた。 $t_{\text{hyd}} = \frac{10^5 R_s}{6.7 \times 10^9 [cm/s]} = 4.5 \times 10^5 [s]$

6.2.3 計算結果

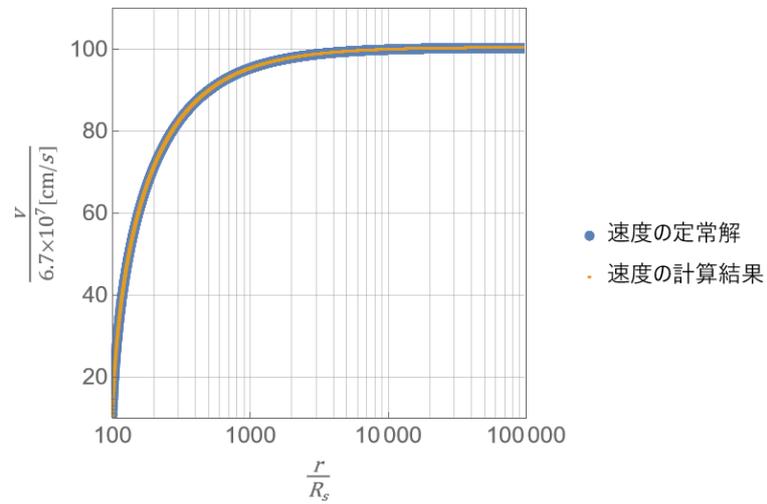


図 6.4 $t = 4.4 \times 10^5$ [s] での速度 v の計算結果

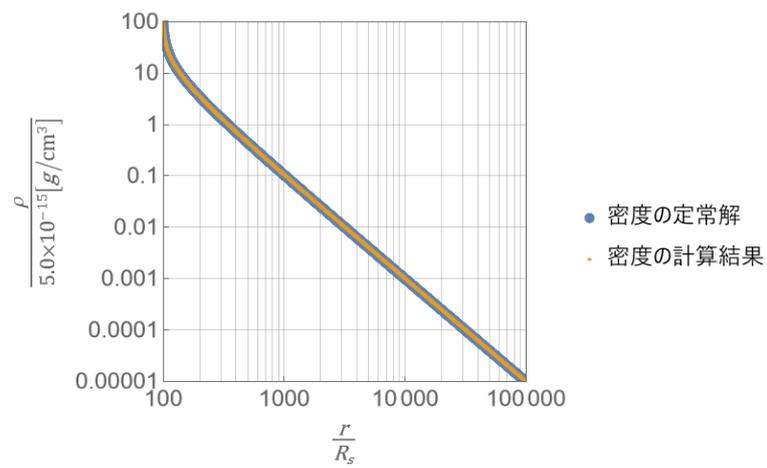


図 6.5 $t = 4.4 \times 10^5$ [s] での密度 ρ の計算結果

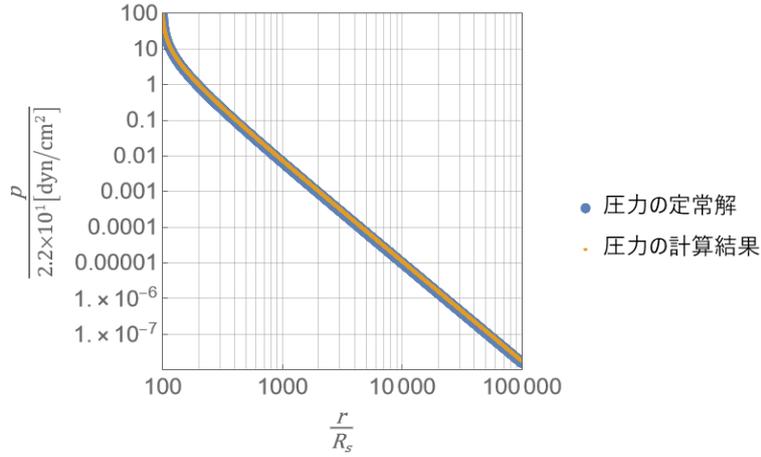


図 6.6 $t = 4.4 \times 10^5 [s]$ での圧力 p の計算結果

速度、密度、圧力すべてにおいて計算結果と定常解が一致した。

6.2.4 輻射加速型 outflow(減光なし) の定常解の求め方

(6.13) を数値的に計算して定常解を求めた。

$$\frac{\partial}{\partial r} \vec{U}(r) + \vec{F}(r) = \vec{0} \quad (6.13)$$

$\vec{U}(r), \vec{F}(r)$ は以下のように置いている。

$$\vec{U}(r) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ (\frac{v^3 \rho}{2}) + P v \frac{\gamma}{\gamma-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1(r) \\ U_2(r) \\ U_3(r) \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

$$\vec{F}(r) = \begin{pmatrix} \frac{2\rho v}{r} \\ \frac{2\rho v^2}{r} + \rho \frac{GM}{r^2} + \rho \frac{\kappa_{es} 6L_{Edd}}{4\pi r^2 c} \\ \frac{2((\frac{v^3 \rho}{2}) + p v \frac{\gamma}{\gamma-1})}{r} + \rho v \frac{GM}{r^2} + \rho v \frac{\kappa_{es} 6L_{Edd}}{4\pi r^2 c} \end{pmatrix} \quad (6.15)$$

(6.13) 内の速度、密度、圧力は $v \rightarrow v(r)$ 、 $\rho \rightarrow \rho(r)$ 、 $p \rightarrow p(r)$ の意味であるので、注意していただきたい。

r の位置での速度 $v(r)$ 、密度 $\rho(r)$ 、圧力 $p(r)$ から $r + \Delta r$ の位置での速度 $v(r + \Delta r)$ 、密度 $\rho(r + \Delta r)$ 、圧力 $p(r + \Delta r)$ の求め方を説明する。 Δr は微小距離を表す。

行程 1 $v(r), \rho(r), p(r)$ から $\vec{U}(r), \vec{F}(r)$ を計算する。

行程 2 (6.13) を使い、以下のような式変形で $\vec{U}(r + \Delta r)$ を求める。

$$\frac{\partial}{\partial r} \vec{U}(r) + \vec{F}(r) = \vec{0} \quad (6.16)$$

$$\rightarrow \frac{\vec{U}(r + \Delta r) - \vec{U}(r)}{\Delta r} + \vec{F}(r) = \vec{0} \quad (6.17)$$

$$\rightarrow \vec{U}(r + \Delta r) = \vec{U}(r) - \vec{F}(r) \Delta r \quad (6.18)$$

行程 3 $U_1(r + \Delta r), U_2(r + \Delta r), U_3(r + \Delta r)$ から $v(r + \Delta r), \rho(r + \Delta r), p(r + \Delta r)$ を計算する。 $U_1'(r + \Delta r) = U_1(r + \Delta r)(\frac{1}{2} - \frac{\gamma}{\gamma-1}), U_2'(r + \Delta r) = U_2(r + \Delta r)(\frac{\gamma}{\gamma-1}), U_3'(r + \Delta r) = U_3(r + \Delta r)$ と置いた場合、 $v(r + \Delta r), \rho(r + \Delta r), p(r + \Delta r)$ は以下のように計算できる。

$$v(r + \Delta r) = \frac{-U_2'(r + \Delta r) \pm \sqrt{(U_2'(r + \Delta r))^2 - 4U_1'(r + \Delta r)U_3'(r + \Delta r)}}{2U_1'(r + \Delta r)} \quad (6.19)$$

$$\rho(r + \Delta r) = \frac{U_1'(r + \Delta r)}{v(r + \Delta r)} \quad (6.20)$$

$$p(r + \Delta r) = U_2'(r + \Delta r) - U_1'(r + \Delta r)v(r + \Delta r) \quad (6.21)$$

(6.19) に関しては、プラスマイナスがある。今回の計算においてはマイナスを採用した。マイナスにすることで超音速解になる。

計算領域は $r = [10^2 R_s, 10^5 R_s]$ としていて、 $r = 10^2 R_s$ の密度、速度、圧力の境界条件は $\rho = 5.0 \times 10^{-13} [g/cm^3], v = 6.7 \times 10^8 [cm/s], p = 2.2 \times 10^3 [dyn/cm^2]$ と設定している。そのため、 $r = 10^2 R_s$ から $r = 10^5 R_s$ まで行程 1,2,3 を繰り返して計算すれば定常解は求まる。

定常解を求めるとき、 Δr の大きさには注意する必要がある。「6.2.2 輻射加速型 outflow(減光なし) の状況設定」のところではグリッド数を 3000 とした。グリッド数 3000 のままで定常解を求めようとしても圧力の値が負となるため、定常解が求まらない。今回はグリッド数 3×10^6 としたことで、定常解を求めることに成功した。