流体・磁気流体方程式の差分解法

松元亮治、富阪幸治、花輪知幸

目 次

第 1 章　差分法の基礎 **7**
1.1 偏微分方程式の型 7
1.2 差分近似 8
1.3 線形スカラー移流方程式の差分解法 9
1.3.1 １次元線形スカラー移流方程式 9
1.3.2 FTCS スキーム 10
1.3.3 FTCS スキームの数値的安定性 12
1.3.4 Lax-Friedrich のスキーム 14
1.3.5 1 次精度風上差分法 15
1.3.6 Lax-Wendroff のスキーム 18
1.4 保存形表示と数値流束 20
1.5 Burgers 方程式の数値解法 21
1.6 流束制限関数 24
1.7 TVD スキーム 26
1.8 放物型方程式の差分解法 26

第 2 章　システム方程式の解法 **31**
2.1 基礎方程式 31
2.1.1 質量 31
2.1.2 運動量 32
2.1.3 エネルギー 32
2.1.4 磁気流体力学 34
2.1.5 保存形式 35
2.2 円筒座標、球座標 36
2.2.1 １次元球対称 36
2.2.2 ２次元軸対称円筒座標 36
2.3 波動 37
2.3.1 線形のガスダイナミクス 38
2.3.2 Riemann 問題 40
2.3.3 非線形のガスダイナミクス 41
2.4 衝撃波 43

2.4.1 ランキン・ユゴニオ関係 46
2.4.2 磁気流体力学 47
2.5 衝撃波管問題 47
2.5.1 等温衝撃波 48
2.5.2 等温の場合の Riemann 不変量 48
2.5.3 等温の場合の衝撃波管の解析解 50
2.5.4 断熱気体の衝撃波管問題 52
2.5.5 断熱気体の衝撃波管問題解析解 * 54

第 3 章 流体および磁気流体力学方程式の風上差分 61
3.1 はじめに 61
3.2 Maxwell 方程式の数値解法 63
3.3 Burgers 方程式の復習と Maxwell 方程式の風上数値流束 67
3.4 流体力学方程式の風上差分 68
3.5 磁気流体力学方程式の風上差分化 71
3.6 さらに勉強する人へ 77

はじめに

流体・磁気流体方程式を差分近似にもとづいて数値的に解くことにより、さまざまな宇宙現象をシミュレートすることができる。このテキストでは、シミュレーションの初心者を対象として差分法の基礎から風上差分にもとづく磁気流体方程式の解法に至るまでを解説した。各章の内容は以下の通りである。

- １章：差分法の基礎　（松元亮治）

  線形及び非線形の１変数の波動方程式を例にして差分法の基礎を学ぶ。差分のとりかたや時間きざみの選び方によっては数値的な不安定性が生ずることを示し、安定性のために満たすべき条件について解説する。また、数値的な安定性に優れ、数値振動を起こさない解法として１次精度の風上差分を導入する。２次精度以上の解法では解の単調性が維持されず数値振動が発生することを示し、単調性を維持するための流束制限関数についても解説する。

- ２章：システム方程式の解法　（富阪幸治）

  流体・磁気流体力学の方程式系にあらわれる２変数以上の非線形連立偏微分方程式の解法について解説する。これらの方程式が波動方程式の集合であることを示し、特性線および特性線に沿って一定に保たれるリーマン不変量について解説する。これらの準備をした上で、初期に圧力、密度などに不連続な分布を持つ気体の時間発展を解析的に求める方法を説明し、この手法を衝撃波管に適用する。

- ３章：流体および磁気流体力学方程式の風上差分　（花輪知幸）

  システム方程式に対して風上差分を適用する方法について解説する。最初に線形のマックスウェル方程式を例にして４変数の場合の風上差分の方法を説明し、続いて流体力学・磁気流体力学方程式にも風上差分を適用する。流体・磁気流体方程式では特性速度が場所によって変化するため適切な平均の取り方が問題となる。平均量の計算方法の例として Roe 平均についても紹介する。

シミュレーションサマースクールでは、このテキストを用いた講義と、宇宙流体・磁気流体シミュレーションの統合ソフトウェア CANS（Coordinated Astronomical Numerical Softwares）を用いた実習がセットになっている。数値不安定性の発生や衝撃波の伝播など、講義で習った内容を実際にシミュレーションを行って確認することにより、理解が深まるであろう。

第1章　差分法の基礎

松元亮治 (千葉大理)

この章では流体・磁気流体方程式を差分法を用いて数値的に解く際に必要になる基礎的事項について解説する。波の伝播をあらわす線形移流方程式や非線形の Burgers 方程式をとりあげ、差分解法の数値的な安定性や数値振動について論じる。特に、数値的な安定性に優れ、非物理的な数値振動を起こさない差分法として風上差分法を紹介する。

1.1　偏微分方程式の型

流体・磁気流体現象をはじめとする自然現象の多くは、以下の 2 次元 2 階偏微分方程式で記述される。

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu + g = 0. \tag{1.1}$$

この方程式は以下のように分類できる。

条件	型	例	
$b^2 - 4ac > 0$	双曲型	$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$	波動方程式
$b^2 - 4ac = 0$	放物型	$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	熱伝導方程式
$b^2 - 4ac < 0$	楕円型	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4\pi G\rho$	ポアソン方程式

波動方程式、熱伝導の式、ポアソン方程式は、それぞれ双曲型、放物型、楕円型偏微分方程式の例になっている。以下では主として双曲型方程式を例にして、差分近似にもとづく偏微分方程式の数値解法を解説する。

1.2　差分近似

変数 u が空間座標 x, y に依存するという 2 次元問題を考える。

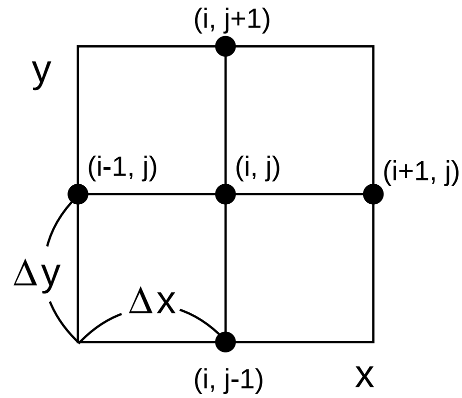

図 1.1: 2 次元メッシュの図

2 次元空間を図のような格子に区切り、各格子点の座標を (x_i, y_j) とする。格子間隔は x 方向が Δx、y 方向が Δy とする。$x_{i\pm1} = x_i \pm \Delta x$、$y_{j\pm1} = y_j \pm \Delta y$ である。以下、格子点番号 (i, j) を用いて $u_{i,j} = u(x_i, y_j)$ のように略記する。

着目している点 (x_i, y_j) のまわりでテイラー展開すると、

$$u_{i+1,j} = u(x_i + \Delta x, y_j) = u_{i,j} + \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \frac{\Delta x^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i + \frac{\Delta x^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i + ... \tag{1.2}$$

$$u_{i-1,j} = u(x_i - \Delta x, y_j) = u_{i,j} - \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \frac{\Delta x^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i - \frac{\Delta x^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i + ... \tag{1.3}$$

式 (1.2) から式 (1.3) を引くと

$$u_{i+1,j} - u_{i-1,j} = 2\Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + O(\Delta x^3) \tag{1.4}$$

したがって、

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \tag{1.5}$$

すなわち、(i, j) 点における u の x 方向の微分係数 $(\partial u/\partial x)_i$ が Δx^2 の誤差を含む近似のもとで (Δx について 2 次の精度で) 以下のように求まる

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} \tag{1.6}$$

これを中心差分の式と言う。

同様にして、Δx について 1 次の精度で以下の差分近似式が得られる。

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} \qquad \text{(前進差分)} \tag{1.7}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} \qquad \text{(後退差分)} \tag{1.8}$$

式 (1.2) と式 (1.3) を加えると

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} = 2u_{i,j} + \Delta x^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i + O(\Delta x^4) \tag{1.9}$$

したがって、

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \tag{1.10}$$

これより、u の x に関する 2 階微分の係数 $(\partial^2 u/\partial x^2)_i$ を Δx について 2 次の精度で以下のように近似することができる

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} \tag{1.11}$$

同様に、

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_j = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2}. \tag{1.12}$$

1.3　線形スカラー移流方程式の差分解法

1.3.1　１次元線形スカラー移流方程式

流体・磁気流体方程式の本質は波の伝播にある。この部分だけを取り出して次のような方程式を考える。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{1.13}$$

ただし、c は定数で $c > 0$ とする。この方程式は、スカラー量 u の空間分布が、一定の速度 c で伝播することをあらわす波動方程式である。

方程式 (1.13) の厳密解は

$$u(x,t) = u(x - ct, 0) \tag{1.14}$$

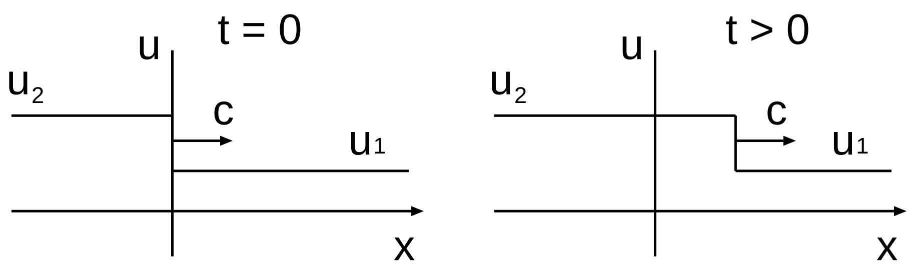

図 1.2: 1 次元スカラー移流問題の初期条件と時間発展

である。これは、時刻 $t > 0$ におけるスカラー量 u のプロフィールは $t = 0$ のスカラー量 u のプロフィールが形を保って ct だけ平行移動した形になることをあらわす。

いま、図 1.2 のように初期に $x \geq 0$ で $u = u_1$、$x < 0$ で $u = u_2$ のように $x = 0$ で不連続な分布を考えてみると $t > 0$ での厳密解は右図のような形になる。

1.3.2　FTCS スキーム

1 次元線形スカラー移流方程式 (1.13) を時間について現在の時刻 t_n と Δt 後の時刻 $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ の間で前進差分、空間については中心差分をとって差分化すると次式を得る。ここで、$u_j^n = u(x_j, t_n)$ である。

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \tag{1.15}$$

このような差分のとり方を FTCS スキーム (Forward in Time and Centered Difference in Space) と言う。これを整理すると、

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{1}{2}\nu(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \tag{1.16}$$

ここで、ν は次式で定義される数であり、クーラン数 と呼ばれる。

$$\nu \equiv c\frac{\Delta t}{\Delta x} \tag{1.17}$$

式（1.16）の右辺は時刻 t_n での値、左辺は時刻 $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ での値だけで書けている。したがって、時刻 t_n での各格子点での値がわかっていれば直ちに 1 タイムステップ後 (t_{n+1}) の各格子点での値を計算することができる。このような解法のことを 陽解法 と言う。FTCS スキームにおける変数の依存関係を図示すると図 1.3 のようになる。矢印は時刻 t_{n+1} の白丸の点の値を計算するのに時刻 t_n の黒丸の格子点の値を使うことを示す。

1 次元波動伝播のシミュレーションを行うアルゴリズムは一般に次のようになる。

1. 各メッシュ点の座標値 x_j をセットする (メッシュ生成)

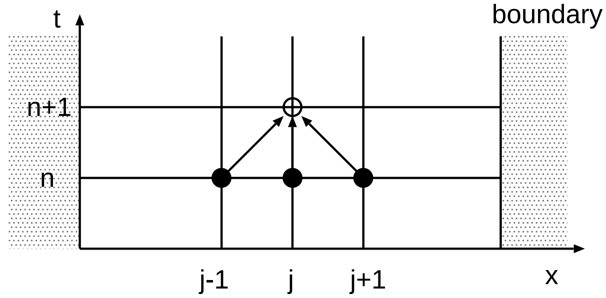

図 1.3: FTCS スキームにおける変数の依存関係

2. 各メッシュ点の初期値 $u_j(t=0)$ をセットする (初期条件)
3. 時刻 t が、あらかじめ決められた終了時刻 t_{end} に達するまで、あるいは決められた回数だけ、以下を繰り返す
   (a) 左右の境界を除く各格子点について Δt 後の値を差分式にもとづいて計算する (時間積分)。たとえば FTCS スキームの場合には計算式 (1.16) を用いる。
   (b) 左右の境界の値を境界条件から決める。たとえば隣接点と同じ値を入れる (境界条件の適用)
   (c) 時刻を Δt だけ進める

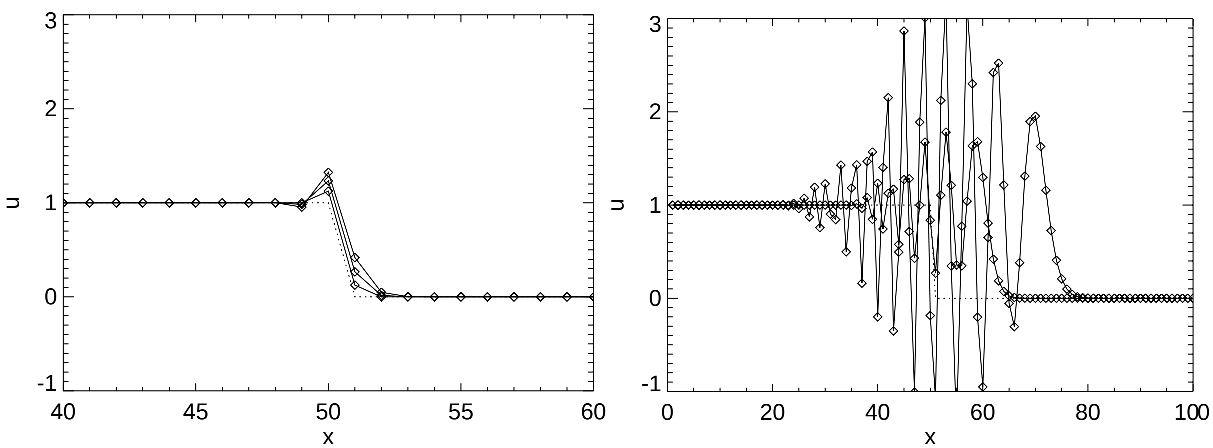

図 1.4: 左図：FTCS スキームで、初期値として、$j=1,...,50$ に対して $u=1$、$j=51,...,100$ に対して $u=0$ とし、クーラン数 $\nu=c\Delta t/\Delta x=0.25$ で 1 ステップ、2 ステップ、3 ステップ計算したときの u をプロットした図。右図：50 ステップ、100 ステップ計算したときの u をプロットした図。

FTCS スキームを用いて１次元線形スカラー移流方程式を解いた結果を図 1.4 に示す。波は形を保って伝わらずに振動が発生してしまっている。この振動は物理的な理由で発生している

のではなく、数値的不安定性によるものである。なぜこのような数値振動が発生してしまうのか、次節で説明する。

1.3.3　FTCS スキームの数値的安定性

Von Neumann の安定性解析

前節の FTCS スキームによって1次元波動伝播のシミュレーションを行ってみると解が激しく振動して数値的に不安定になってしまうことがわかった（図1.4)。この不安定性の原因を調べるために

$$u_j^n = \cos(j\theta) \tag{1.18}$$

を差分式 (1.16) に代入してみる。ここで θ は、波の波数を k として $\theta = k\Delta x$ であらわされる量である。たとえば $\theta = \pi$ のとき u_j^n は図1.5左図のように2メッシュで1波長の波、$\theta = \pi/3$ のときは右図のように6メッシュで1波長の波をあらわす。

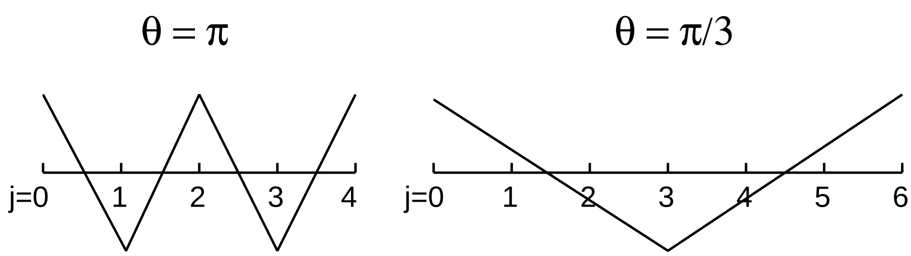

図 1.5: メッシュ番号を j としたときの $u_j^n = \cos(j\theta)$ のプロフィール。左図: $\theta = \pi$ の場合。右図： $\theta = \pi/3$ の場合。

その結果は

$$u_j^{n+1} = \cos(j\theta) + \nu\sin\theta\sin(j\theta) \tag{1.19}$$

これをもう一度差分式に代入すると

$$\begin{aligned} u_j^{n+2} &= (1 - \nu^2\sin^2\theta)\cos(j\theta) + 2\nu\sin\theta\sin(j\theta) && (1.20) \\ &= Re\left[(1 - i\nu\sin\theta)^2 e^{ij\theta}\right] && (1.21) \end{aligned}$$

である。ここで、i は虚数単位、Re は実部をとることをあらわす。以上からわかるように、

$$u_j^{n+k} = Re\left[(1 - i\nu\sin\theta)^k e^{ij\theta}\right] \tag{1.22}$$

が成り立つ。

差分法 (差分スキーム) の数値的安定性を導くひとつの方法として、式 (1.18) を複素数に拡張した

$$u_j^n = g^n e^{ij\theta} \tag{1.23}$$

を差分式に代入して複素増幅率 g を求め、1 タイムステップ間の振幅の増幅率 $|g| \le 1$ となる条件を求める方法がある。これを Von Neumann の安定性解析と言う。

$u_j^n = g^n \exp(ij\theta)$ を FTCS 差分式に代入すると

$$\begin{aligned} g &= 1 - \frac{1}{2}\nu(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) && (1.24)\\ &= 1 - i\nu\sin\theta && (1.25) \end{aligned}$$

したがって

$$|g|^2 = 1 + \nu^2\sin^2\theta \ge 1 \tag{1.26}$$

以上の結果より、$\theta = 0$ の場合を除いて FTCS スキームは常に不安定になる。

テイラー展開による方法

この節は最初に読む際には読み飛ばしてもかまわない。

差分化した式にテイラー展開を適用して差分式が満たす偏微分方程式を導くことによっても FTCS スキームが数値的に不安定であることを示すことができる。$t_{n+1} = t_n + \Delta t$、$x_{j\pm1} = x_j \pm \Delta x$ を用いると、

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\partial u}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Delta t^2 + ... \tag{1.27}$$

$$u_{j+1}^n = u_j^n + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\Delta x^3 + ... \tag{1.28}$$

$$u_{j-1}^n = u_j^n - \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x^2 - \frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\Delta x^3 + ... \tag{1.29}$$

FTCS スキームの差分式

$$u_j^{n+1} - u_j^n = -\frac{1}{2}\nu(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \tag{1.30}$$

の左辺に (1.27)、右辺に (1.28)、(1.29) を代入すると、

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Delta t^2 = -\nu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\Delta x^3 + ...\right) \tag{1.31}$$

これを整理すると

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Delta t - \frac{c}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\Delta x^2 + ... \tag{1.32}$$

ここで、解くべき偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c\frac{\partial u}{\partial x} \tag{1.33}$$

より

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.34}$$

であることを用いると

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{c^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta t - \frac{c}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\Delta x^2 + ... \tag{1.35}$$

右辺が差分化によって新たに加わった項である。右辺第 1 項は負の拡散係数を持つ拡散項になっている。「正の拡散」は物理量の値のピークをなまらせる働きがあるが、「負の拡散」では物理量が周囲よりもわずかに高い値を持つ部分があるとこのピークがどんどん大きくなるという不安定性を生ずる。

よって、テイラー展開法からもスカラー移流方程式の FTCS スキームは数値的に不安定であることがわかる。

1.3.4　Lax-Friedrich のスキーム

この方法では FTCS スキームの右辺の u_j^n を $(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)/2$ で置き換え、以下のように差分化する。

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{\nu}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \tag{1.36}$$

$u_j^n = g^n \mathrm{exp}(ij\theta)$ を代入して増幅率 g を求めると

$$\begin{aligned} g &= \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) - \frac{1}{2}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) && (1.37) \\ &= \cos\theta - i\nu\sin\theta && (1.38) \end{aligned}$$

したがって

$$|g|^2 = \cos^2\theta + \nu^2\sin^2\theta \tag{1.39}$$

図 1.6 に増幅率 $|g|$ を θ の関数として極座標 (g, θ) で示す。Lax-Friedrich のスキームでは、クーラン数 $\nu = c\Delta t/\Delta x$ が $|\nu| \leq 1$ を満たす場合、安定に計算を進めることができる。この条件のことを Courant, Friedrich, Lewy 条件 (CFL 条件あるいはクーラン条件) と言う。

クーラン条件の意味を考えてみよう。差分式 (1.36) を書き換えると以下の式を得る。

$$u_j^{n+1} = \frac{1-\nu}{2}u_{j+1}^n + \frac{1+\nu}{2}u_{j-1}^n \tag{1.40}$$

クーラン条件 $|\nu| \leq 1$ が満たされている場合、時刻 $t = t_{n+1}$ の値 u_j^{n+1} は $t = t_n$ の $j-1$ 点の値 u_{j-1}^n と $j+1$ 点の値 u_{j+1}^n の内挿値になっている。

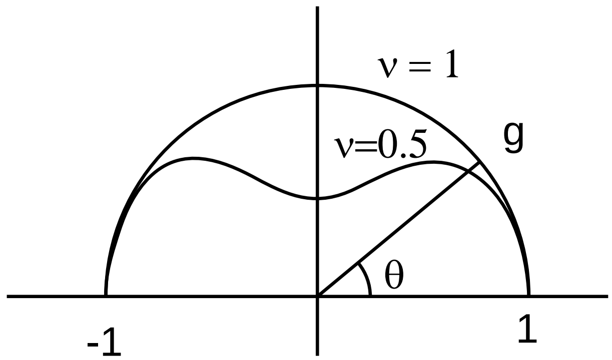

図 1.6: Lax-Friedrich スキームの場合の増幅率

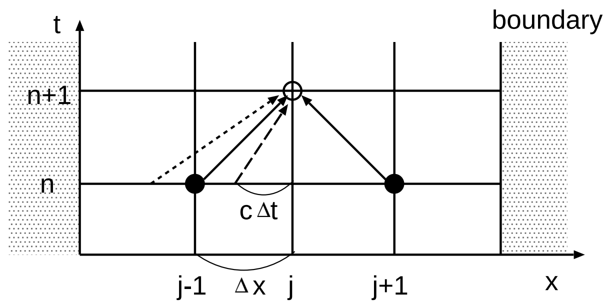

図 1.7: Lax-Friedrich スキームにおける依存関係。破線と点線はそれぞれ $\nu < 1$、$\nu > 1$ の場合の波の伝播を示す。

図 1.7 に Lax-Friedrich スキームにおける変数の依存関係を示す。実線は時刻 $t = t_{n+1}$ の白丸の格子点の値を計算する際に用いられる時刻 $t = t_n$ の格子点、破線は $\nu = c\Delta t/\Delta x < 1$ の場合、点線は $\nu > 1$ の場合の波の伝播を示す。

クーラン条件は $|c|\Delta t < \Delta x$、すなわち時間間隔 Δt の間に波が 1 メッシュ以上伝わってはいけないことを意味する。u_j^{n+1} は u_{j-1}^n と u_{j+1}^n だけから計算されるが、時間間隔が $\Delta t > \Delta x/|c|$ となると $x_{j-1} \leq x \leq x_{j+1}$ より外側からも情報が伝わってくるため計算を安定に進めることができなくなるのである。

図 1.8 に Lax-Friedrich スキームを用いて 1 次元線形スカラー移流方程式の解を求めた結果を示す。 数値振動のない解が得られている。Lax-Friedrich スキームの欠点は数値散逸が大きく、不連続面が時間とともになまってしまうことである。

1.3.5　1 次精度風上差分法

図 1.9 のように波が正の方向に伝わっている場合を考える。このとき、j 点での空間微分を、j 点と風上にあたる $j-1$ 点の間の差分で近似する方法が風上差分である。

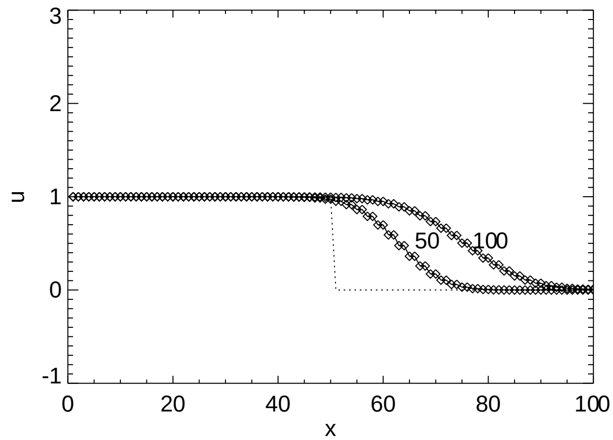

図 1.8: Lax-Friedrich スキームを用いた１次元線形スカラー移流問題のシミュレーション結果。クーラン数 $\nu = 0.25$ で 50 ステップ、100 ステップ計算した結果を示す。

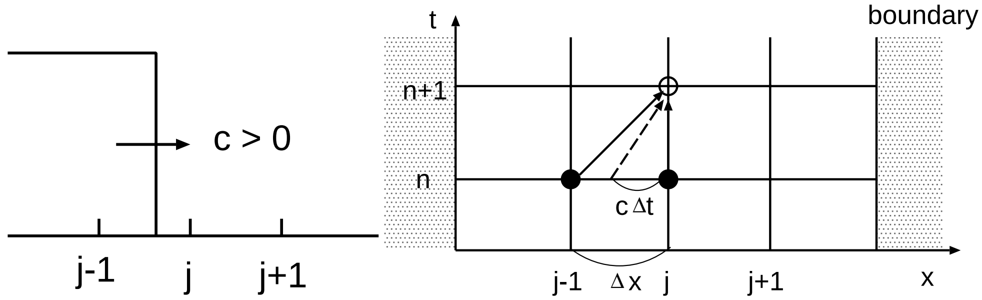

図 1.9: 左図：右方向に伝わる波、右図：1 次精度風上差分における依存関係。破線は波による情報の伝達を示す。

１次元スカラー移流方程式を時間については前進差分、空間については風上差分として差分化すると、$c > 0$ の場合、以下の差分式を得る。

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \tag{1.41}$$

したがって

$$u_j^{n+1} = u_j^n - c\frac{\Delta t}{\Delta x}(u_j^n - u_{j-1}^n) \tag{1.42}$$

図 1.9 右図に１次精度風上差分における変数の依存関係を示す。黒丸は時刻 t_{n+1} の白丸の格子点の値を計算する際に用いられる時刻 t_n の格子点、破線は時刻 t_{n+1} に白丸の格子点に到達する波の伝播を示す。

増幅率は

$$g \;=\; 1 - \nu(1 - e^{-i\theta}) \tag{1.43}$$

$$= \quad (1-\nu+\nu\cos\theta) - i\nu\sin\theta \tag{1.44}$$

したがって

$$|g|^2 \quad = \quad (1-\nu+\nu\cos\theta)^2 + \nu^2\sin^2\theta \tag{1.45}$$

$$= \quad 1-2\nu(1-\nu)(1-\cos\theta) \tag{1.46}$$

これより、$0 \le \nu \le 1$ の場合、任意の θ について $|g| \le 1$ であり、安定であることがわかる。

風上差分の差分式（1.42）は次のようにも書ける。

$$u_j^{n+1} = (1-\nu)u_j^n + \nu u_{j-1}^n. \tag{1.47}$$

クーラン条件 $0 \le \nu \le 1$ が満たされている場合、u_j^{n+1} は時刻 $t = t_{n+1}$ に j 番目の格子点に到達する波の $t = t_n$ での位置（図 1.9 の破線矢印の出発点）における値 $u(x_j - c\Delta t, t_n)$ を u_{j-1}^n と u_j^n から線形内挿した値になっている。

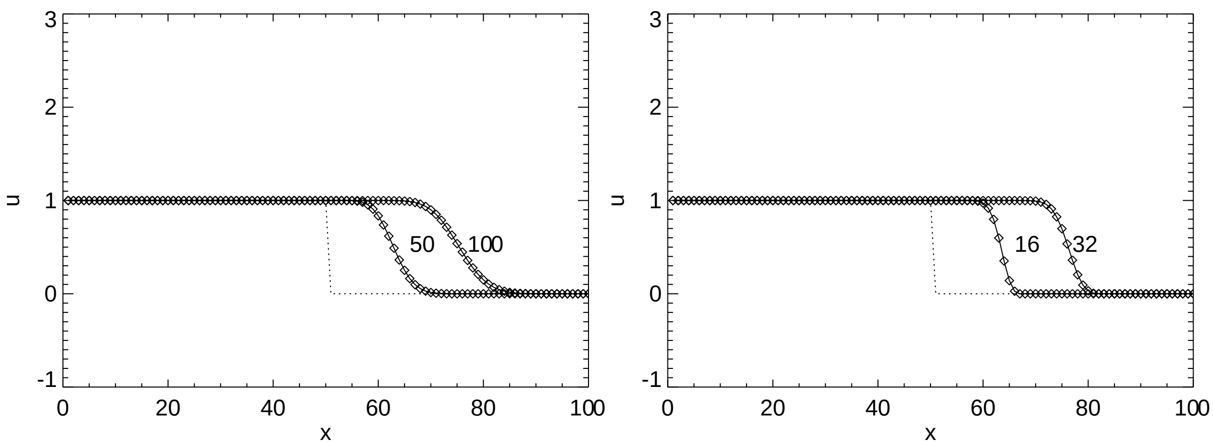

図 1.10: 1 次精度風上差分法を用いた 1 次元線形スカラー移流問題のシミュレーション結果。左：クーラン数 $\nu = 0.25$ で 50 ステップ、100 ステップ計算した結果。右：$\nu = 0.80$ で 16 ステップ、32 ステップ計算した結果。

図 1.10 に 1 次精度風上差分法を用いたシミュレーション結果を示す。

練習問題

- クーラン数 ν が 1,0.75,0.5 の場合について 1 次精度風上差分の増幅率 $|g|$ を位相 θ の関数として求め、極座標 $(|g|, \theta)$ でプロットせよ。

- 1 次精度風上差分法の差分式 (1.42) にテイラー展開を適用することによって、以下の偏微分方程式が得られることを示せ。右辺第 1 項が拡散項であることに注意して、クーラン条件を導け。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}c\Delta x(1-\nu)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{6}c(\Delta x)^2(2\nu^2 - 3\nu + 1)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + ... \tag{1.48}$$

1.3.6　Lax-Wendroffのスキーム

Lax-Wendroffスキームはテイラー展開にもとづく差分法であり、以下のようにして導かれる。

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta t^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(\Delta t^3) \tag{1.49}$$

右辺第2項、第3項に $\partial u/\partial t = -c\partial u/\partial x$、$\partial^2 u/\partial t^2 = c^2\partial^2 u/\partial x^2$ を代入すると

$$u_j^{n+1} = u_j^n - c\Delta t\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}c^2\Delta t^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\Delta t^3) \tag{1.50}$$

空間微分 $\partial u/\partial x$、$\partial^2 u/\partial x^2$ をそれぞれ中心差分で近似すると

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{1}{2}c\Delta t\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} + \frac{1}{2}c^2\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \tag{1.51}$$

これがLax-Wendroffスキームである。以上の導出過程からわかるように、Lax-Wendroffスキームは空間、時間についていずれも2次精度の解法になっている。

Lax-Wendroffスキームの安定性をvon Neumannの方法で調べてみる。増幅率は

$$\begin{aligned} g &= 1 - \frac{\nu}{2}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) + \frac{\nu^2}{2}(e^{i\theta} - 2 + e^{-i\theta}) && (1.52)\\ &= 1 - i\nu\sin\theta + \nu^2\cos\theta - \nu^2 && (1.53) \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} |g|^2 &= [1 - \nu^2(1-\cos\theta)]^2 + \nu^2\sin^2\theta && (1.54)\\ &= 1 - 2\nu^2(1-\nu^2)(1-\cos\theta) && (1.55) \end{aligned}$$

これより、$|\nu| \le 1$ であれば任意の θ について $|g| \le 1$ であり、安定であることがわかる。

1次元スカラー方程式の場合、Lax-Wendroffスキームは以下のように2段階に分けたスキームと同等である。この方法を2段階Lax-Wendroff法と呼ぶ。

$$u_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{u_{j+1}^n + u_j^n}{2} - \frac{1}{2}c\frac{\Delta t}{\Delta x}(u_{j+1}^n - u_j^n) \tag{1.56}$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - c\frac{\Delta t}{\Delta x}(u_{j+1/2}^{n+1/2} - u_{j-1/2}^{n+1/2}) \tag{1.57}$$

これを図示すると図1.11のようになる。

図1.12にLax-Wendroff法を用いて1次元線形スカラー移流方程式の数値解を求めた結果を示す。

Lax-Wendroff法は空間、時間についていずれも2次精度の方法であるが、不連続面近傍で数値振動を生じるという欠点を持つ。これに関して、以下の定理が知られている。

Godunov の定理

1次元スカラー移流方程式 $\partial u/\partial t + c\partial u/\partial x = 0$ に対して、

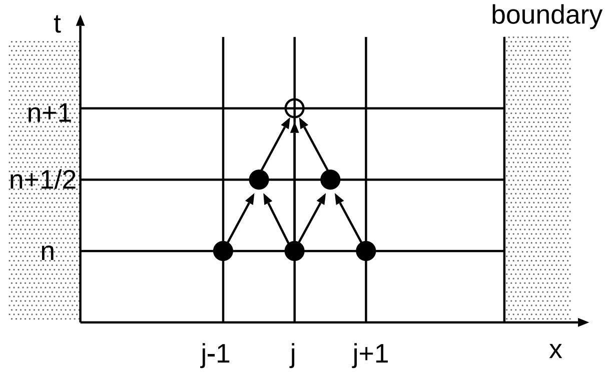

図 1.11: 2 段階 Lax-Wendroff スキームにおける依存関係。第一段階で時刻 t_n における格子点 $j-1$、j、$j+1$ の値から時刻 $t_{n+1/2}$ における格子点 $j-1/2$、$j+1/2$ の値が計算される。第二段階ではこれらの点の値を用いて時刻 t_{n+1} の白丸の格子点の値が求まる。

$$u_j^{n+1} = \sum_k a_k u_{j+k}^n \tag{1.58}$$

の形の 2 次精度以上の精度を持つどのようなスキームも解の単調性を維持することはできない。

ここで、「解の単調性を維持する」とは、時刻 t_n におけるプロフィール $u(x, t_n)$ が x に関して単調増加または単調減少する関数であるならば時刻 t_{n+1} における関数 $u(x, t_{n+1})$ も単調増加または単調減少関数でなければならないことを意味する。たとえば 1 次精度風上差分の場合、$0 \le \nu \le 1$ なら u_j^{n+1} は必ず u_{j-1}^n と u_j^n の間の値をとるため、もしも $u_{j-1}^n \le u_j^n \le u_{j+1}^n$ なら $u_j^{n+1} \le u_{j+1}^{n+1}$ となり、単調性が維持される。Godunov の定理の証明については、たとえば藤井 (1994) を参照されたい。

数値振動を抑える方法には以下のものがある。

- 人工粘性を加える

  粘性係数を κ として、

$$\tilde{u}_j^{n+1} = u_j^{n+1} + \kappa \frac{\Delta t}{\Delta x^2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \tag{1.59}$$

  とする。

  拡散係数 κ は、たとえば以下のように不連続面付近で大きな値をとるように決める。Q_v はパラメータである。

$$\kappa_{j+1/2} = Q_v \Delta x |u_{j+1}^n - u_j^n| \tag{1.60}$$

- 流束制限関数を用いる

  これについては後述する。

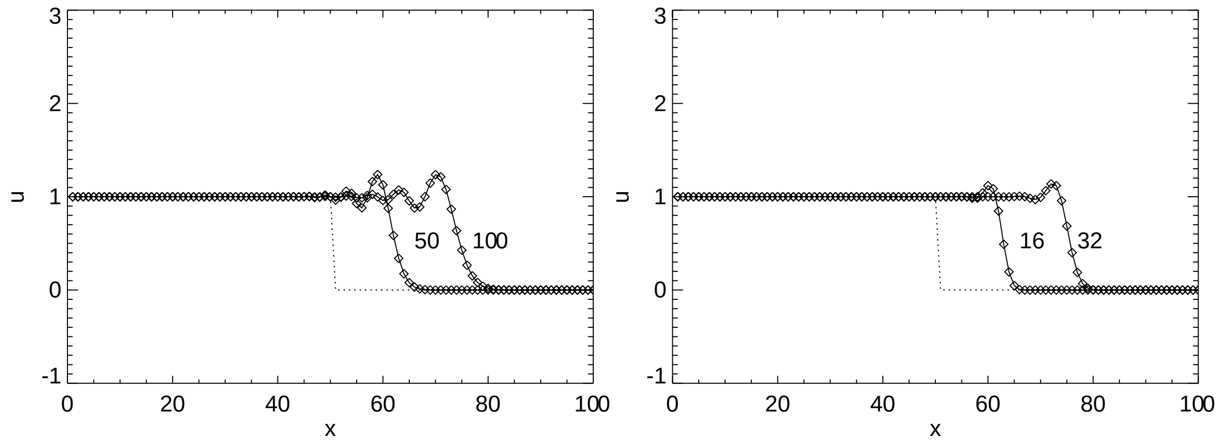

図 1.12: 2段階 Lax-Wendroff 法による1次元線形スカラー移流方程式のシミュレーション結果。左図：クーラン数 $\nu = 0.25$ で 50 ステップ、100 ステップ計算した結果。右図：クーラン数 $\nu = 0.80$ で 16 ステップ、32 ステップ計算した結果。

1.4　保存形表示と数値流束

1次元スカラー移流方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{1.61}$$

を以下の形に変形する

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \tag{1.62}$$

ここで、

$$f = cu \tag{1.63}$$

は流束をあらわす。式 (1.62) の形を保存形と呼ぶ。

保存形式の物理的意味を考えるために、図 1.13 に四角で囲って示した領域 $(x_{j-1/2} < x < x_{j+1/2})$ における保存量 u の時間変化を求めてみよう。方程式 (1.62) を $x = x_{j-1/2}$ から $x = x_{j+1/2}$ まで積分すると次式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u dx + f(x_{j+1/2}) - f(x_{j-1/2}) = 0. \tag{1.64}$$

したがって、保存量 u の積分量

$$u_j^n = \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, t_n) dx \tag{1.65}$$

の時間変化は、この時間の間に左右の境界 $x_{j\pm1/2}$ を通って出入りする流束 $f_{j\pm1/2}$ の差に等しい。これより次式を得る。

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(f_{j+1/2}^n - f_{j-1/2}^n) \tag{1.66}$$

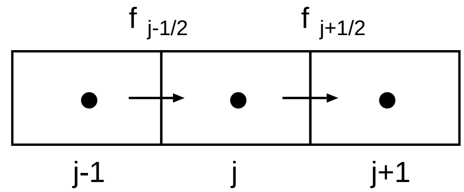

図 1.13: メッシュ点とメッシュ境界を通って出入りする流束の関係

差分式 (1.66) は保存則を厳密に満たす。これが保存形式を用いる利点である。

メッシュ境界の流束 $f^n_{j\pm1/2}$ は各メッシュ点での流束から近似的に計算することができる。これを 数値流束 と言い、$\tilde{f}^n_{j\pm1/2}$ であらわす。各種差分スキームの差分式から数値流束を求めると以下のようになる。

- FTCS

$$\tilde{f}^n_{j+1/2} = \frac{1}{2}(f^n_{j+1} + f^n_j) \tag{1.67}$$

- Lax-Friedrich

$$\tilde{f}^n_{j+1/2} = \frac{1}{2}\left[(1 - \frac{1}{\nu})f^n_{j+1} + (1 + \frac{1}{\nu})f^n_j\right] \tag{1.68}$$

- Upwind (風上差分)

$$\tilde{f}^n_{j+1/2} = \frac{1}{2}\left[(f^n_{j+1} + f^n_j) - |c|(u^n_{j+1} - u^n_j)\right] \tag{1.69}$$

この式は、$c > 0$ の場合は $\tilde{f}^n_{j+1/2} = f^n_j$、$c < 0$ の場合は $\tilde{f}_{j+1/2} = f^n_{j+1}$ と一致する。

- Lax-Wendroff

$$\tilde{f}^n_{j+1/2} = \frac{1}{2}\left[(1 - \nu)f^n_{j+1} + (1 + \nu)f^n_j\right] \tag{1.70}$$

1.5 Burgers 方程式の数値解法

ここまでは、移流の速さ c が一定の場合の１次元線形スカラー移流方程式を扱ってきた。本節では、以下のような 非線形 波動方程式を差分近似によって解くことを考える。これは、非粘性の場合の Burgers 方程式である。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{1.71}$$

この方程式は流線に沿うラグランジュ微分 $d/dt = \partial/\partial t + u\partial/\partial x$ を用いると次のように表現できる。

$$\frac{du}{dt} = 0 \tag{1.72}$$

粒子的な描像に立てば、この方程式は力を受けていない粒子の運動を記述しており、その解はもちろん $u =$ 一定 である。初期速度分布が正弦波的な場合、図 1.14 に示すように、振幅が正の 領域は $+x$ 方向に、負の領域は $-x$ 方向に移動してしだいに波が突っ立ち、有限の時刻で後からきた粒子が前の粒子に追いついてしまう。連続系では空間の 1 点で速度が多価になることはできないため、このような場合に解に不連続が生じる。

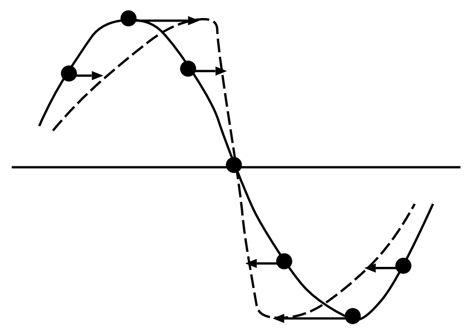

図 1.14: Burgers 方程式の解の様子。ある有限の時刻で後ろからきた粒子が前の粒子に追いつく。

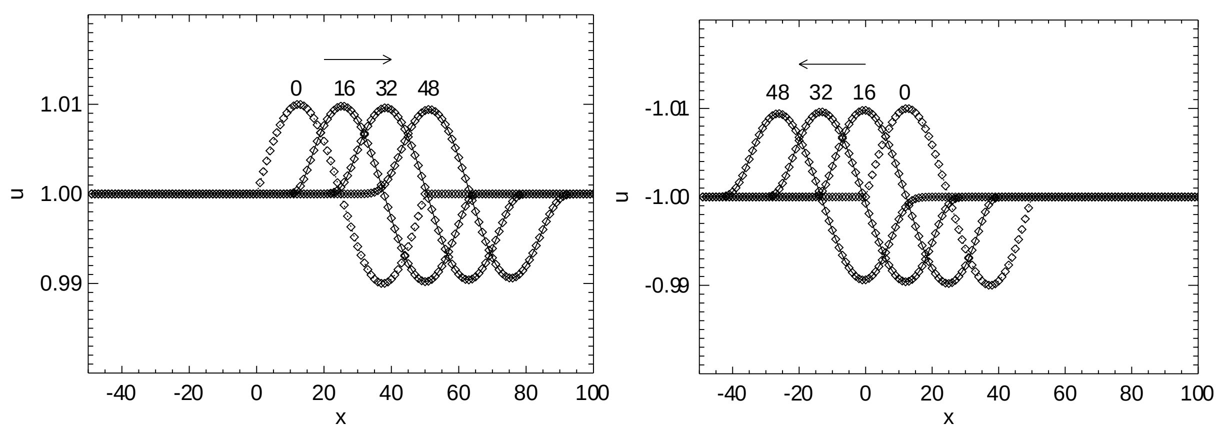

図 1.15: Burgers 方程式を 1 次精度風上差分法で解いた結果の例。左：初期に $u > 0$ の場合。右：初期に $u < 0$ の場合。図中の数字は時間ステップ数。時間きざみは $\Delta t/\Delta x = 0.8$ とした。

Burgers 方程式を差分法によって解くため、方程式をまず、以下のような保存系に変形する。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right) = 0 \tag{1.73}$$

これは、流束 $f(x)$ が $f(x) = u^2/2$ の場合に相当し、各種差分スキームを適用することができる。たとえば１次精度の風上差分法を適用する場合、線形スカラー方程式で移流の速さ c が一定である場合には $c > 0$ のとき $f^n_{j+1/2} = f^n_j$ であったことに注意し、メッシュ境界の $j + 1/2$ 点での速さを $(u_j(t) + u_{j+1}(t))/2$ で近似すると、

- $u_{j+1}(t) + u_j(t) > 0$ のとき、$f^n_{j+1/2} = f^n_j = |u_j(t)|^2/2$

- $u_{j+1}(t) + u_j(t) \leq 0$ のとき、$f^n_{j+1/2} = f^n_{j+1} = |u_{j+1}(t)|^2/2$

図 1.15 に初期に $u(x) = 1 + \epsilon\sin(kx)$ $(\epsilon = 0.01,\ 0 \leq kx \leq 2\pi)$ のような速度分布を与えた場合の Burgers 方程式の解を１次精度の風上差分法で計算した結果を示す。図 1.15 左図の場合、初期に $u \sim 1$ であることから予想できるように非線形効果が小さい間の解は波の速さが $c = 1$ の場合の線形スカラー移流方程式の解とほぼ一致し、波はほぼその形を保ちながら右側に伝わっていく。図 1.15 右図では初期に $u \sim -1$ であり、波は左に伝わる。

非線形性が強くなる場合の Burgers 方程式の数値解の例を図 1.16 に示す。この例では初期に $u(x) = 1 + 0.1\sin(kx)$ のような速度分布を与え、その後の時間発展を１次精度の風上差分法によって解いた。Burgers 方程式の非線形項 $u\partial u/\partial x$ の効果により波がしだいに突っ立ち、不連続（衝撃波）が形成されることがわかる。

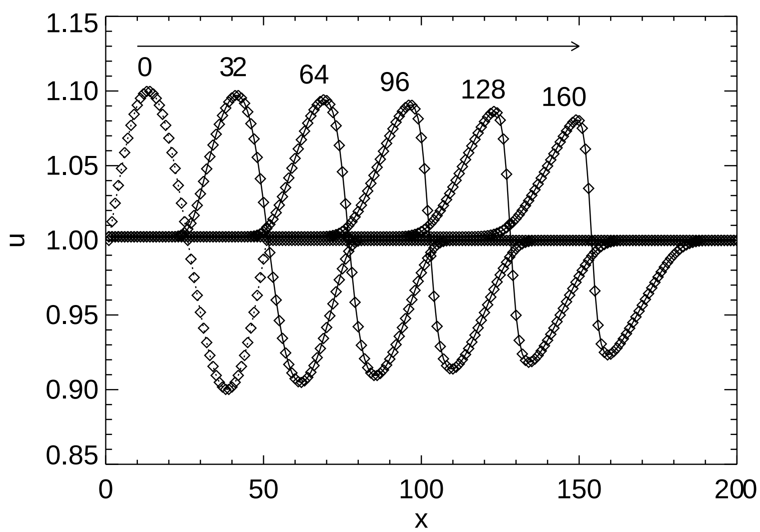

図 1.16: 初期に $u(x) = 1 + 0.1\sin(kx)$ の速度分布から始めた場合の Burgers 方程式の数値解。図中の数字は時間ステップ数。１次精度風上差分法で時間きざみは $\Delta t/\Delta x = 0.8$ とした。

1.6　流束制限関数

以上、線形スカラー移流方程式と Burgers 方程式を例にして差分解法について解説してきた。１次精度の風上差分法を用いるとこれらの方程式の解にあらわれる不連続面を数値振動を起こすことなくとらえることができる。しかしながら、Godunov の定理が示すように、空間２次精度以上の解法では数値振動があらわれてしまうことがわかった。

Lax-Wendroff 法の数値流束を補正することによって、不連続面近傍での振動を抑えることができないかどうか考えてみよう。Lax-Wendroff 法の数値流束は次のようにも書ける。

$$\tilde{f}^n_{j+1/2} = c[u^n_j + \frac{1}{2}(1-\nu)(u^n_{j+1} - u^n_j)] \tag{1.74}$$

数値振動が生じない 1 次精度の風上差分の数値流束は $c > 0$ のとき $\tilde{f}^n_{j+1/2} = cu_j$ であり、Lax-Wendroff 法の数値流束の右辺第 1 項と一致している。そこで、Lax-Wendroff 法の数値流束の右辺第 2 項を次のように補正してみる。

$$\tilde{f}^n_{j+1/2} = c[u^n_j + \frac{1}{2}(1-\nu)B_{j+1/2}(u^n_{j+1} - u^n_j)] \tag{1.75}$$

ここで導入した $B_{j+1/2}$ のことを 流束制限関数 と呼ぶ。数値流束 (1.75) を差分式 (1.66) に代入して変形すると次式を得る。

$$\frac{u^{n+1}_j - u^n_j}{u^n_{j-1} - u^n_j} = \nu[1 - \frac{1}{2}(1-\nu)B_{j-1/2}] + \frac{1}{2}\nu(1-\nu)\frac{B_{j+1/2}}{r_j} \tag{1.76}$$

ここで、

$$r_j \equiv \frac{u^n_j - u^n_{j-1}}{u^n_{j+1} - u^n_j} \tag{1.77}$$

である。

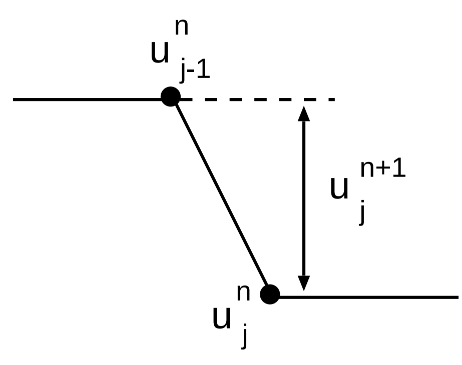

図 1.17: 数値振動が生じないようにするために u^{n+1}_j の値を制限する範囲

数値振動が生じないようにするために、図 1.17 に示したように u^{n+1}_j が u^n_j と u^n_{j-1} の間の値をとるように制限を加えることにしよう。これには、式 (1.76) の左辺の値を以下のように制限

すればよい。

$$0 \leq \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{u_{j-1}^n - u_j^n} \leq 1 \tag{1.78}$$

式 (1.76) の右辺を代入すると以下の条件を得る。

$$-\frac{2}{\nu} \leq B_{j-1/2} - \frac{B_{j+1/2}}{r_j} \leq \frac{2}{1-\nu} \tag{1.79}$$

CFL 条件が満たされている場合 $0 \leq \nu \leq 1$ なので、

$$-2 \leq B_{j-1/2} - \frac{B_{j+1/2}}{r_j} \leq 2 \tag{1.80}$$

この関係式は、以下のふたつの条件がともに満たされれば成立する。

$$0 \leq B_{j+1/2} \leq 2 \tag{1.81}$$

かつ

$$0 \leq \frac{B_{j+1/2}}{r_j} \leq 2 \tag{1.82}$$

この範囲を図示すると図 1.18 の斜線のない領域になる。$r < 0$ の場合は $B_{j+1/2} = 0$ のみが許される。

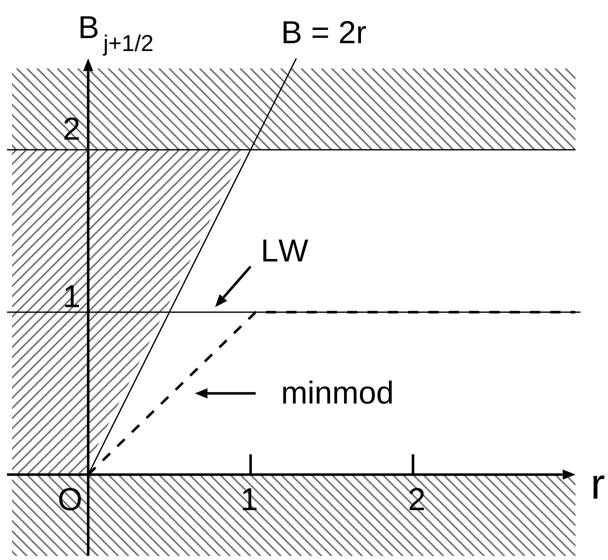

図 1.18: 流束制限関数 $B_{j+1/2}(r)$ の許容範囲。LW は Lax-Wendroff スキームの数値流束に対応する制限関数。minmod は minmod 関数。

Lax-Wendroff 法の数値流束では $B_{j+1/2} = 1$ (図の LW) であるため、$r < 1/2$ の領域で許容範囲外となり、数値振動が生じる。図の許容範囲内にある流束制限関数を用いることにより、数

値振動が起こらないようにすることができる。その一例は以下の minmod 関数 (図の minmod) である。

$$\mathrm{minmod}(r) = \begin{cases} 0 & (r < 0) \\ r & (0 \le r \le 1) \\ 1 & (r > 1) \end{cases} \tag{1.83}$$

1.7　TVD スキーム

前節では、数値振動をおさえる方法として流束制限関数を導入した。ここでは、数値振動の発生を定量化する方法について考える。

このために、1 次元線形スカラー移流方程式において以下の量を定義する。

$$U = \int \left| \frac{du}{dx} \right| dx. \tag{1.84}$$

この量は波の振幅の総和に等しく、移流方程式の厳密解では波のプロフィールが保たれるため、$dU/dt = 0$ である。

以上との類推により、メッシュ点ごとの物理量の変化量の総和を次式のように定義し、これを Total Variation (TV) と言う。

$$TV(u^n) \equiv \sum_j |u^n_{j+1} - u^n_j| \tag{1.85}$$

Total Variation が時間とともに増大しないという条件

$$TV(u^{n+1}) \le TV(u^n) \tag{1.86}$$

のことを Total Variation Diminishing (TVD) 条件と呼ぶ。

流束制限関数を導入することによって、差分スキームが TVD 条件を満たすようにすることができる。

1.8　放物型方程式の差分解法

天体シミュレーションにあらわれる放物型方程式

- 熱伝導方程式

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T$$

- 磁気拡散方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \eta \nabla^2 \boldsymbol{B}$$

以下のような 1 次元拡散方程式を差分近似によって初期値問題として解くことを考えてみよう。すなわち、時刻 $t = 0$ における $u(x,t)$ の値 $u(x,0)$ を与えて、任意の時刻 $t\ (> 0)$ における $u(x,t)$ を求める。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.87}$$

拡散係数 κ は x に依らないとする。よく知られているように、この方程式の解は初期条件をフーリエ変換することによって解析的に求めることができる。解のおおまかな様子を図に示す。

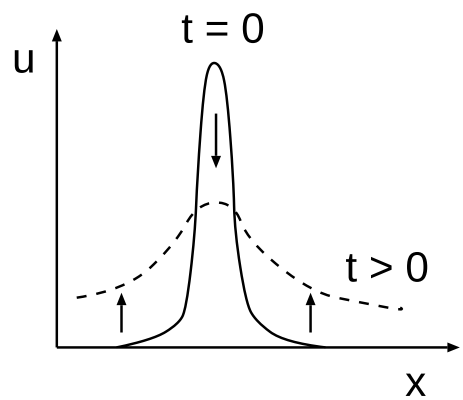

図 1.19: 拡散方程式の解の時間発展の様子

拡散方程式の陽解法 (explicit 法)

1 次元拡散方程式 (1.87) を時間について現在の時刻 t_n と Δt 後の時刻 $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ の間で前進差分、空間については中心差分 (FTCS 差分）をとって差分化すると次式を得る。ここで、$u_j^n = u(x_j, t_n)$ である。

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \kappa \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \tag{1.88}$$

式 (1.88) を変形して次式を得る

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\kappa \Delta t}{\Delta x^2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \tag{1.89}$$

右辺は時刻 t_n での値、左辺は時刻 $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ での値だけで書けている。したがって、時刻 t_n での各格子点での値がわかっていれば直ちに 1 タイムステップ後 (t_{n+1}) の各格子点での値を計算することができる (陽解法)。

Von Neumann の安定性解析

FTCS スキームの数値的安定性を調べるために $u_j^n = g^n \exp(ij\theta)$ を FTCS 差分式に代入すると

$$g^{n+1}e^{ij\theta} = g^n e^{ij\theta} + \frac{\kappa\Delta t}{\Delta x^2} g^n [e^{i(j+1)\theta} - 2e^{ij\theta} + e^{i(j-1)\theta}]. \tag{1.90}$$

よって、

$$g = 1 - 2\frac{\kappa\Delta t}{\Delta x^2}(1 - \cos\theta). \tag{1.91}$$

増幅率が $|g| \le 1$ であるためには

$$-1 \le 1 - 2\frac{\kappa\Delta t}{\Delta x^2}(1 - \cos\theta) \le 1. \tag{1.92}$$

したがって、

$$0 \le \frac{\kappa\Delta t}{\Delta x^2}(1 - \cos\theta) = \frac{\kappa\Delta t}{\Delta x^2} 2\sin^2\frac{\theta}{2} \le 1. \tag{1.93}$$

任意の θ (任意の波長の波) について安定であるためには

$$0 \le \frac{\kappa\Delta t}{\Delta x^2} \le \frac{1}{2}. \tag{1.94}$$

以上により、FTCS スキームにより 1 次元拡散方程式のシミュレーションを行う場合、時間ステップ Δt が上式を満たすようにコントロールする必要があることがわかる。たとえばメッシュサイズを半分にした場合、Δt は 1/4 にしなければならない。

拡散方程式の陰解法 (implicit 法)

拡散方程式を差分化する際に右辺の空間差分の部分に、求めるべき t_{n+1} での u の値を含めて差分化する方法がある。このような方法を陰解法(implicit) 法と呼び、explicit 法とは安定性条件が異ってくる。代表的な陰解法である Crank-Nicolson 法では、パラメータ λ を導入して、以下のように差分化する。

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \kappa \left[\lambda \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + (1 - \lambda) \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right] \tag{1.95}$$

これを整理すると次のような行列を含む式になる。

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^{n+1} = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{u}^n). \tag{1.96}$$

これを解いて $\boldsymbol{u}^{n+1}$ を求めればよい。

練習問題

1. 行列 $\boldsymbol{A}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ の各要素を求めなさい。

2. Von Neumann の安定性解析により、$\lambda > 1/2$ ならば $\kappa\Delta t/\Delta x^2 > 0$ を満たす任意の Δt について Crank-Nicolson スキームは数値的に安定であることを示しなさい。

参考文献

(1) 流体力学の数値計算法 (1994) 東京大学出版会、藤井孝蔵著
(2) 数値天体物理学サマースクールのテキスト (2000)、富阪幸治、花輪知幸著
(3) Numerical Computation of Internal and External Flows, C. Hirsch, John Wiley & Sons, 1990

(1) は、数値流体力学全般についてまとめられたテキストであり、必読文献である。

第2章　システム方程式の解法

富阪幸治（国立天文台）

第１章では、線形、非線形の一変数の波動方程式の数値解法について学んだ。ここでは、流体力学、磁気流体力学の方程式系について学び、ここにあらわれる非線系連立方程式の解法が第１章のそれと同じようにして得られることを示す。

2.1　基礎方程式

ここでは、まず流体力学の基礎方程式を導出する。その後、磁場の効果を考慮し、磁気流体力学の基礎方程式を得る。

2.1.1　質量

まず最初の基礎方程式は、ある体積の中に含まれる流体の質量が単位時間に流れ込む質量流速によって増減するという連続の式

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho dV = -\int_S \rho \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}dS \tag{2.1}$$

から得られる。これに Gauss の定理

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}dS = \int_V \mathrm{div}\boldsymbol{E}dV \tag{2.2}$$

を用いて右辺を体積積分に変換すると、

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}dV + \int_V \mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v})dV = 0 \tag{2.3}$$

が得られる。この式は空間中にある体積を固定した時にその内部に含まれる質量の保存を表す式である。

V として微小体積を考えれば、微分形で表した質量保存の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v}) = 0 \tag{2.4}$$

が得られる。

2.1.2　運動量

つぎに、ある体積の中に含まれる流体の運動量は、質量と同じように、単位時間に流れ込む運動量流束によって増減するが、それに加えて運動量の場合は、この流体の体積に加わっている「力」によっても増減する。

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho \boldsymbol{v} dV = -\int_S \rho \boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})dS - \int_S p\boldsymbol{n}dS + \int_V \rho\boldsymbol{g}dV \tag{2.5}$$

右辺第 2 項は、表面に加わる力で、ここでは圧力による運動量変化を表している。第 3 項は体積力で、ここでは重力 $\rho\boldsymbol{g}$（$\boldsymbol{g}$ は重力加速度）による運動量変化を表している。もう一つの Gauss の定理

$$\int_S f\boldsymbol{n}dS = \int_V \mathrm{grad} f dV \tag{2.6}$$

を用いて右辺第 2 項を体積積分に変換すると、

$$\int_V \frac{\partial \rho\boldsymbol{v}}{\partial t}dV + \int_V \mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v})dV = -\int_V \mathrm{grad} p dV + \int_V \rho\boldsymbol{g}dV \tag{2.7}$$

ここで V として微小体積を考えれば、

$$\frac{\partial \rho\boldsymbol{v}}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}) = -\mathrm{grad} p + \rho\boldsymbol{g} \tag{2.8}$$

が得られる。$\rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}$ はテンソル積で

$$\rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \rho v_x v_x & \rho v_x v_y & \rho v_x v_z \\ \rho v_y v_x & \rho v_y v_y & \rho v_y v_z \\ \rho v_z v_x & \rho v_z v_y & \rho v_z v_z \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

をあらわす。この式は添字をつけて書くと、

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i v_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i \tag{2.10}$$

と書ける。もちろん、$x_1 = x$、$x_2 = y$、$x_3 = z$ を表している。

2.1.3　エネルギー

エネルギーの保存を考える。単位体積あたりの全エネルギー e は運動エネルギーと内部エネルギー ϵ の和で

$$e = \frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{v}|^2 + \epsilon, \tag{2.11}$$

で与えられる。理想気体の場合、単位質量あたりの内部エネルギーは温度に比例するので、単位体積あたりのそれは温度×密度に比例し、

$$\epsilon = \frac{p}{\gamma - 1}, \tag{2.12}$$

（γ は気体の比熱比）とかける。質量と同じように、全エネルギーの増減はエネルギー流束によるだけなら、$\partial e/\partial t + \mathrm{div}(e\boldsymbol{v}) = 0$ となるはずであるが、そうではない。

熱力学の第１法則で断熱の場合を考えると、内部エネルギー U と体積 V は

$$\frac{dU}{dt} + p\frac{dV}{dt} = 0 \tag{2.13}$$

という関係で変化する。これは次のように書き換えられる。

$$\frac{d}{dt}\int_V \epsilon dV + p\int_S (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})dS = 0, \tag{2.14}$$

第２項を変形するのに、単位時間あたりの体積変化が $(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})dS$ の積分に比例することを用いた。ここで、第１項の時間微分が空間に固定された体積に含まれる内部エネルギーでなく、時間 $t=0$ で体積 $V(t=0)$ にあった物質の時間 $t>0$ での体積 $V(t)$ に含まれる内部エネルギーの時間変化（ラグランジェによる微分と呼ぶ）を表していることに注意し、時間微分が空間に固定された体積に含まれる内部エネルギーの時間変化（オイラーによる微分と呼ぶ）に書き換える。

$$\frac{d}{dt}\int_V \epsilon dV = \frac{\partial}{\partial t}\int_V \epsilon dV + \int_S \epsilon(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})dS, \tag{2.15}$$

であるから、

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \epsilon dV + \int_S \epsilon(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})dS = -p\int_S (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})dS \tag{2.16}$$

となる。この微分形として、単位体積あたりの熱エネルギー ϵ は

$$\frac{\partial\epsilon}{\partial t} + \mathrm{div}(\epsilon\boldsymbol{v}) = -p\ \mathrm{div}\boldsymbol{v} \tag{2.17}$$

という関係にしたがって変化することが簡単な計算でわかる。これと式 (2.8) から得られる運動エネルギーの変化を表す方程式（この式の右辺が単位体積・単位時間に流体素片になされた仕事を表すことに注意）

$$\frac{\partial\rho|\boldsymbol{v}|^2/2}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\frac{\rho|\boldsymbol{v}|^2}{2}\boldsymbol{v}\right) = -\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}p + \rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{g}, \tag{2.18}$$

の和をとれば全エネルギーに関する方程式が得られる。断熱の場合のエネルギーに関する方程式は、

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \mathrm{div}\left[(e+p)\boldsymbol{v}\right] = \rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{g} \tag{2.19}$$

ここで e は単位体積あたりの全エネルギーで

$$e = \frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{v}|^2 + \epsilon, \tag{2.20}$$

で与えられる。

流体力学の基礎方程式は、式 (2.4)、(2.8) および (2.19) である。このようにして得られた、流体力学の基礎方程式は、ガリレイ変換不変であることに注意しておこう。

2.1.4　磁気流体力学

磁場の効果を取り入れよう。ローレンツ力を外力として加えると、

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{c}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B} &= -\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}), \\
&= -\nabla\left(\frac{B^2}{8\pi}\right)+\frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}, \qquad (2.21)
\end{aligned}
$$

だから、式 (2.8) は

$$
\frac{\partial\rho\boldsymbol{v}}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}) = -\nabla p+\rho\boldsymbol{g}-\nabla\left(\frac{B^2}{8\pi}\right)+\frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} \qquad (2.22)
$$

もしくは、流束の項に Maxwell の応力テンソルを加える形にして、

$$
\frac{\partial\rho v_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i v_j+p\delta_{ij}-\frac{1}{4\pi}B_iB_j+\frac{1}{8\pi}B^2\delta_{ij}) = \rho g_i \qquad (2.23)
$$

のように書き直せる。またエネルギー方程式は、エネルギーに磁場のエネルギーを加え、流束にポインティングベクトルを加えることによって、

$$
\frac{\partial}{\partial t}\left(e+\frac{B^2}{8\pi}\right)+\nabla\cdot\left[(e+p)\,\boldsymbol{v}+\frac{1}{4\pi}\left\{\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\right\}\right]=0 \qquad (2.24)
$$

のようになる。

さらに、電磁気学のファラデーの法則

$$
\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad (2.25)
$$

とアンペールの法則

$$
\nabla\times\boldsymbol{B} = \frac{c}{4\pi}\boldsymbol{j} \qquad (2.26)
$$

オームの法則

$$
\boldsymbol{j} = \sigma(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) \qquad (2.27)
$$

から磁場の誘導方程式

$$
\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})+\frac{c^2}{4\pi\sigma}\nabla^2\boldsymbol{B} \qquad (2.28)
$$

が得られる。ここで、電気伝導度 $\sigma\to\infty$ を理想磁気流体力学 (ideal MHD) 極限とよぶ。

これから、磁気流体力学の基礎方程式は、式 (2.4)、(2.22) もしくは (2.23)、(2.24) と (2.28) になる。

2.1.5 保存形式

流体力学の基礎方程式をまとめると、以下のようになる。

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho v_x}{\partial x}+\frac{\partial\rho v_y}{\partial y}+\frac{\partial\rho v_z}{\partial z}=0, \tag{2.29}$$

$$\frac{\partial\rho v_x}{\partial t}+\frac{\partial\rho v_x^2+p}{\partial x}+\frac{\partial\rho v_x v_y}{\partial y}+\frac{\partial\rho v_x v_z}{\partial z}=\rho g_x, \tag{2.30}$$

$$\frac{\partial\rho v_y}{\partial t}+\frac{\partial\rho v_y v_x}{\partial x}+\frac{\partial\rho v_y^2+p}{\partial y}+\frac{\partial\rho v_y v_z}{\partial z}=\rho g_y, \tag{2.31}$$

$$\frac{\partial\rho v_z}{\partial t}+\frac{\partial\rho v_z v_x}{\partial x}+\frac{\partial\rho v_z v_y}{\partial y}+\frac{\partial\rho v_z^2+p}{\partial z}=\rho g_z, \tag{2.32}$$

$$\frac{\partial e}{\partial t}+\frac{\partial(e+p)v_x}{\partial x}+\frac{\partial(e+p)v_y}{\partial y}+\frac{\partial(e+p)v_z}{\partial z}=\rho(v_x g_x+v_y g_y+v_z g_z), \tag{2.33}$$

ここで、体積力の外力が働いていない（通常の流体力学が主に対象とする）場合は密度、運動量密度、全エネルギー密度は、それらの流束の発散で与えられる。このため、このような形式の基礎方程式を保存形式と呼ぶ。

これは、保存量

$$\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}\rho\\ \rho v_x\\ \rho v_y\\ \rho v_z\\ e\end{pmatrix}, \tag{2.34}$$

に対して、その x 方向、y 方向、z 方向に流れる流束、

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}\rho v_x\\ \rho v_x^2+p\\ \rho v_x v_y\\ \rho v_x v_z\\ (e+p)v_x\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}\rho v_y\\ \rho v_y v_x\\ \rho v_y^2+p\\ \rho v_y v_z\\ (e+p)v_y\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}\rho v_z\\ \rho v_z v_x\\ \rho v_z v_y\\ \rho v_z^2+p\\ (e+p)v_z\end{bmatrix}, \tag{2.35}$$

を用いて、

$$\frac{\partial\boldsymbol{U}}{\partial t}+\frac{\partial\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U})}{\partial x}+\frac{\partial\boldsymbol{G}(\boldsymbol{U})}{\partial y}+\frac{\partial\boldsymbol{H}(\boldsymbol{U})}{\partial z}=\boldsymbol{S}(\boldsymbol{U}), \tag{2.36}$$

$\boldsymbol{S}$ はソース項で体積力である重力のみが働いている時は

$$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}0\\ \rho g_x\\ \rho g_y\\ \rho g_z\\ \rho(v_x g_x+v_y g_y+v_z g_z)\end{bmatrix}, \tag{2.37}$$

のように与えられる。

2.2 円筒座標、球座標

軸対称、球対称などの対称性を持つ問題については、空間の独立変数の数（次元）を減らすことにより、計算量を減少させる。そのため、１次元球対称の場合の球座標や、２次元軸対称の場合の円筒座標で書いた基礎方程式を見ておくことにする。

2.2.1 １次元球対称

１次元球対称の場合は、基礎方程式は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 \rho v_r}{\partial r} = 0, \tag{2.38}$$

$$\frac{\partial \rho v_r}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 \rho v_r^2}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial r}, \tag{2.39}$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 (e+p) v_r}{\partial r} = 0, \tag{2.40}$$

であるが、r^2 を掛けた以下の量を保存量と流束にとることによって

$$\bar{\boldsymbol{U}} = r^2 \boldsymbol{U} = r^2 \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_r \\ e \end{pmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{F}} = r^2 \boldsymbol{F} = r^2 \begin{bmatrix} \rho v_r \\ \rho v_r^2 + p \\ (e+p) v_r \end{bmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{S}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2rp \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.41}$$

基礎方程式は、

$$\frac{\partial \bar{\boldsymbol{U}}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\boldsymbol{F}}(\bar{\boldsymbol{U}})}{\partial r} = \bar{\boldsymbol{S}}(\bar{\boldsymbol{U}}), \tag{2.42}$$

のようになる。

2.2.2 ２次元軸対称円筒座標

２次元軸対称の問題を円筒座標 (z, r) を用いて解く場合は良く行なわれる。円筒座標 (z, r) について考えると、$\mathrm{div}\mathbf{A}$ が $\partial A_x/\partial x + \partial A_y/\partial y$ から $(1/r)\partial(rA_r)/\partial r + \partial A_z/\partial z$ などの表式が変わるので流束とソース項がデカルト座標のそれとは違うことになる。保存量、流束、ソース項を

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_r \\ \rho v_z \\ e \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \rho v_r \\ \rho v_r^2 + p \\ \rho v_r v_z \\ (e+p) v_r \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} \rho v_z \\ \rho v_z v_r \\ \rho v_z^2 + p \\ (e+p) v_z \end{bmatrix}, \boldsymbol{S} = -\frac{1}{r} \begin{bmatrix} \rho v_r \\ \rho v_r^2 \\ \rho v_r v_z \\ v_r (e+p) \end{bmatrix}, \tag{2.43}$$

のように取ると、基礎方程式は、

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U})}{\partial r} + \frac{\partial \boldsymbol{G}(\boldsymbol{U})}{\partial z} = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{U}), \tag{2.44}$$

のようになる。この形式で書くと、ソース項は $r \to 0$ で形式的には発散する（実際には同時に $v_r \to 0$ となるから発散はしないが）形をしているので、特別な取り扱いが必要になる。

もう一つの方法は

$$\bar{\boldsymbol{U}} = r\boldsymbol{U}, \quad \bar{\boldsymbol{F}} = r\boldsymbol{F}, \quad \bar{\boldsymbol{G}} = r\boldsymbol{G}, \quad \bar{\boldsymbol{S}} = \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.45}$$

のように、保存量、流束に r を掛けた量を用いると、基礎方程式は、

$$\frac{\partial \bar{\boldsymbol{U}}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\boldsymbol{F}}(\bar{\boldsymbol{U}})}{\partial r} + \frac{\partial \bar{\boldsymbol{G}}(\bar{\boldsymbol{U}})}{\partial z} = \bar{\boldsymbol{S}}(\bar{\boldsymbol{U}}), \tag{2.46}$$

のようになる。

2.3　波動

一次元の流体力学を考える。基礎方程式は

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U})}{\partial x} = 0, \tag{2.47}$$

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ e \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x^2 + p \\ (e+p) v_x \end{bmatrix}, \tag{2.48}$$

であるが、ここでは特にエントロピー一定のガスに対する１次元流体力学を考える。エントロピー一定でなくとも $p = p(\rho)$ のように圧力が密度だけに依存して変化するバロトロピー気体でも議論は同じである。エネルギー保存に関する e の変化を考える第３成分の式はポアッソンの関係式 $p = K\rho^\gamma$（バロトロピー気体なら $p = p(\rho)$）で置き換えられる。

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U})}{\partial x} = 0, \tag{2.49}$$

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x^2 + p \end{pmatrix}, \tag{2.50}$$

この２本の式と $p = K\rho^\gamma$ で方程式系が閉じることは容易にわかる。

ここで、$\partial p/\partial x = (\partial p/\partial \rho)_{\rm ad}\,(\partial \rho/\partial x) = c_s^2 \partial \rho/\partial x$ [$(\partial p/\partial \rho)_{\rm ad} = c_s^2$ にあらわれる c_s を音速と呼ぶ] であることに注意して、上の式を書き直すと

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} = 0, \tag{2.51}$$

$$\frac{\partial \rho v_x}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_x^2)}{\partial x} + c_s^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \tag{2.52}$$

となる。

2.3.1　線形のガスダイナミクス

系が一様（密度 ρ_0）で静止（速度 $v_x = 0$）しており、変化が微小である場合（$|\delta\rho| \ll \rho_0$、$|v_x| \ll c_s$)、式 (2.51)、(2.52) は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0, \tag{2.53}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{c_s^2}{\rho_0}\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \tag{2.54}$$

となる。

これは第１章で学んだ１成分の移流方程式のように書き直すと

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \rho \\ v_x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \rho_0 \\ c_s^2/\rho_0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} \rho \\ v_x \end{pmatrix} = 0 \tag{2.55}$$

のようになる。この式を、象徴的に、

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \boldsymbol{A}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0, \tag{2.56}$$

あるいは、さらに１成分の移流方程式に近い形にして

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \boldsymbol{A}\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \tag{2.57}$$

のように書くことにする。ここで出てくる行列 $\boldsymbol{A}$ を対角化することを考える。

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & \rho_0 \\ c_s^2/\rho_0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.58}$$

の固有値を求めると二つの相異なる実固有値は $\lambda_1 = -c_s$、および $\lambda_2 = +c_s$ であること、また行列$\boldsymbol{A}$を対角行列

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \tag{2.59}$$

に対角化するには、行列$\boldsymbol{A}$の固有値 λ_i とその固有値に属する行列$\boldsymbol{A}$の右固有ベクトル $\boldsymbol{r}^{(i)}$ を用いると、

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{r}^{(i)} = \lambda_i \boldsymbol{r}^{(i)}, \tag{2.60}$$

（$\boldsymbol{r}^{(i)}$ は縦ベクトル $(\alpha, \beta)^t$）。また、その固有値に属する行列$\boldsymbol{A}$の左固有ベクトル $\boldsymbol{\ell}^{(i)}$ を用いると、

$$\boldsymbol{\ell}^{(i)}\boldsymbol{A} = \lambda_i \boldsymbol{\ell}^{(i)}, \tag{2.61}$$

（$\boldsymbol{\ell}^{(i)}$ は横ベクトル (γ, δ)）で、

$$\boldsymbol{\ell}^{(i)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{r}^{(i)} = \lambda_i, \tag{2.62}$$

と書ける。これを、$i = 1, 2$ について両方考える。つまり、右固有ベクトルを横に並べて作った右固有行列

$$\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{r}^{(1)}, \boldsymbol{r}^{(2)}) \tag{2.63}$$

および、左固有ベクトルを縦に並べて作った左固有行列

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\ell}^{(1)} \\ \boldsymbol{\ell}^{(2)} \end{pmatrix}, \tag{2.64}$$

を用いると、

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{LAR}, \tag{2.65}$$

もしくは、

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R\Lambda L}, \tag{2.66}$$

のように対角化されることがわかる。もちろん、$\boldsymbol{\ell}^{(i)} \cdot \boldsymbol{r}^{(j)} = \delta_{ij}$ であるから、$\boldsymbol{LR} = \boldsymbol{I}$ で $\boldsymbol{L}$ と $\boldsymbol{R}$ は逆行列の関係にある。$\boldsymbol{R}$、$\boldsymbol{L}$を具体的に書くと、

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \rho_0 & \rho_0 \\ -c_s & c_s \end{pmatrix}, \tag{2.67}$$

また

$$\boldsymbol{L} = \frac{1}{2c_s\rho_0} \begin{pmatrix} c_s & -\rho_0 \\ c_s & \rho_0 \end{pmatrix}, \tag{2.68}$$

である。これは、式 (2.55) が以下のように書き直せることを意味する。

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \boldsymbol{R\Lambda L}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x} = 0. \tag{2.69}$$

ここで、行列 $\boldsymbol{R}$、逆行列 $\boldsymbol{L}$ が一定であり微分演算と交換することを用いると、この式は、以下のように書き換えられる。

$$\frac{\partial \boldsymbol{LU}}{\partial t} + \boldsymbol{\Lambda}\frac{\partial \boldsymbol{LU}}{\partial x} = 0, \tag{2.70}$$

すなわち、$\boldsymbol{LU} = \boldsymbol{L}(\rho, v_x)^t = W \equiv (w_1, w_2)^t$ という新しい変数に対しては、基礎方程式は独立な二つの式に分解できることがわかる。すなわち、

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} - c_s\frac{\partial w_1}{\partial x} = 0 \quad \text{と、} \frac{\partial w_2}{\partial t} + c_s\frac{\partial w_2}{\partial x} = 0, \tag{2.71}$$

である。

$t = 0$ での w に対する初期条件は u に対するそれから $w(x, t = 0) = Lu(x, t = 0)$ のようにして求められ、移流方程式はその $w(x, t = 0) \equiv (w_1^0, w_2^0)^t$ の値を w_1^0 は左へ、w_2^0 は右へ、速度 c_s で移動させて行く。すなわちこの解は、

$$\begin{aligned} w_1(x,t) &= w_1(x + c_s t, 0), \\ &= Lu(x + c_s t, 0), \\ &= \frac{1}{2\rho_0 c_s}\left[c_s\rho(x + c_s t, 0) - \rho_0 v_x(x + c_s t, 0)\right], \end{aligned} \tag{2.72}$$

$$\begin{aligned} w_2(x,t) &= w_2(x-c_st,0), \\ &= Lu(x-c_st,0), \\ &= \frac{1}{2\rho_0 c_s}\left[c_s\rho(x-c_st,0)+\rho_0 v_x(x-c_st,0)\right], \end{aligned} \tag{2.73}$$

で与えられることになる。最後に、この解を、$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{RW}$ で逆変換すれば、ρ、v_x の時間発展が得られ、

$$\begin{aligned} \rho(x,t) &= \rho_0 w_1(x,t)+\rho_0 w_2(x,t), \\ &= \frac{1}{2c_s}\left[c_s\rho(x+c_st,0)-\rho_0 v_x(x+c_st,0)\right] \\ &\quad +\frac{1}{2c_s}\left[c_s\rho(x-c_st,0)+\rho_0 v_x(x-c_st,0)\right], \end{aligned} \tag{2.74}$$

$$\begin{aligned} v_x(x,t) &= -c_s w_1(x,t)+c_s w_2(x,t), \\ &= -\frac{1}{2\rho_0}\left[c_s\rho(x+c_st,0)-\rho_0 v_x(x+c_st,0)\right] \\ &\quad +\frac{1}{2\rho_0}\left[c_s\rho(x-c_st,0)+\rho_0 v_x(x-c_st,0)\right], \end{aligned} \tag{2.75}$$

のように得られる。

2.3.2 Riemann 問題

線形ガスダイナミクス方程式のような定係数の双曲型方程式系の初期値問題で、初期値に存在した不連続が進化する形の解を考える。つまり、

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}+\boldsymbol{A}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x}=0, \tag{2.76}$$

というシステムを、初期条件、

$$\boldsymbol{U}(x,t=0)=\begin{cases} \boldsymbol{U}_L & (x<0) \\ \boldsymbol{U}_R & (x>0) \end{cases}, \tag{2.77}$$

の元に解くようなものである。式 (2.74)、(2.75) から、図 2.1 で、点 P、Q、R は影響を受ける初期状態 $\rho(x\pm c_st,t=0)$、$v_x(x\pm c_st,t=0)$ が $\boldsymbol{U}_L$ であるか $\boldsymbol{U}_R$ であるかが異なっている。

すなわち、点 P は右に進む音波 $\lambda_2=+c_s$ では $\boldsymbol{U}_L$ と、左に進む音波 $\lambda_1=-c_s$ では $\boldsymbol{U}_R$ に影響を受けており、点 Q は右に進む音波でも左に進む音波でも $\boldsymbol{U}_L$ に影響を受けており、点 R は右に進む音波でも左に進む音波でも $\boldsymbol{U}_R$ に影響を受けていることがわかる。

$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{RW}$ という関係は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{U}(x,t) &= \sum_{i=1}^{2} w_i(x,t)\boldsymbol{r}^{(i)}, \\ &= \sum_{i=1}^{2} w_i(x-\lambda_i t,t=0)\boldsymbol{r}^{(i)}, \end{aligned} \tag{2.78}$$

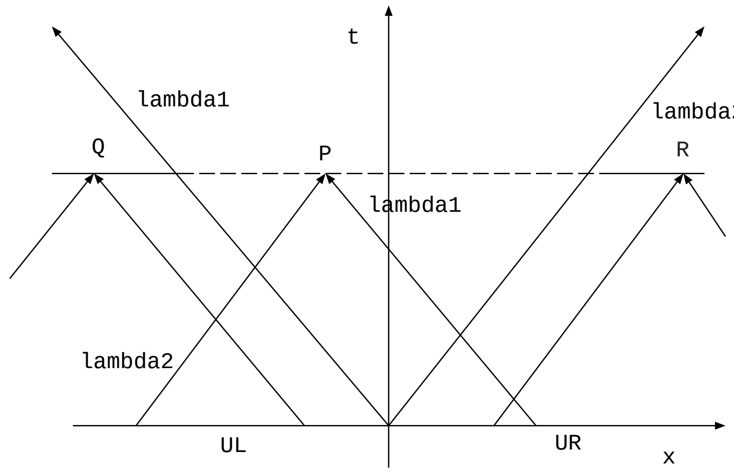

図 2.1: 特性線によって区分けされた領域ごとに、いずれの初期値の影響下にあるかがわかる。

と書き直せる。ここで、$\boldsymbol{r}^{(i)}$ は λ_i に属する右固有ベクトルを表している。

同様に、初期状態 $\boldsymbol{U}_L$ と $\boldsymbol{U}_R$ を λ_i に属する固有ベクトルで展開すると

$$\boldsymbol{U}_L = \sum_{i=1}^{2} \alpha_i \boldsymbol{r}^{(i)}, \quad \boldsymbol{U}_R = \sum_{i=1}^{2} \beta_i \boldsymbol{r}^{(i)} \tag{2.79}$$

となるが、図 2.1 で点 Q の属する領域では $\boldsymbol{U}_L = \alpha_1 \boldsymbol{r}^{(1)} + \alpha_2 \boldsymbol{r}^{(2)}$ であり、また、点 R の属する領域では $\boldsymbol{U}_R = \beta_1 \boldsymbol{r}^{(1)} + \beta_2 \boldsymbol{r}^{(2)}$ であるが、点 P の属する領域では $\boldsymbol{U}_* = \beta_1 \boldsymbol{r}^{(1)} + \alpha_2 \boldsymbol{r}^{(2)}$ となる。

ここで、注意すべき点は、この Riemann 問題で、左から右へ λ_1 で伝搬する特性線を越えると、$\Delta \boldsymbol{U} = (\beta_1 - \alpha_1)\boldsymbol{r}^{(1)}$ だけ変化し、またさらに λ_2 で伝搬する特性線を越えると、$\Delta \boldsymbol{U} = (\beta_2 - \alpha_2)\boldsymbol{r}^{(2)}$ だけ値が変化するということである。

2.3.3 非線形のガスダイナミクス

バーガーズ方程式

ここまでの例では、定数係数の行列 $\boldsymbol{A}$ は一定値の特性スピード $\pm c_s$ を与えたため、すべての特性線は同じ傾きを持ち、同じ種類の特性線が交わることはなかった。

第 1 章で、非線形の代表選手として非粘性バーガーズ方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \tag{2.80}$$

を学んだ。ここでは行列 $\boldsymbol{A}$ に相当するものは u となるから、一つだけ存在する特性スピード λ が空間、時間によって異なり、$d\lambda(u)/du > 0$ であることがわかる (convex flux)。

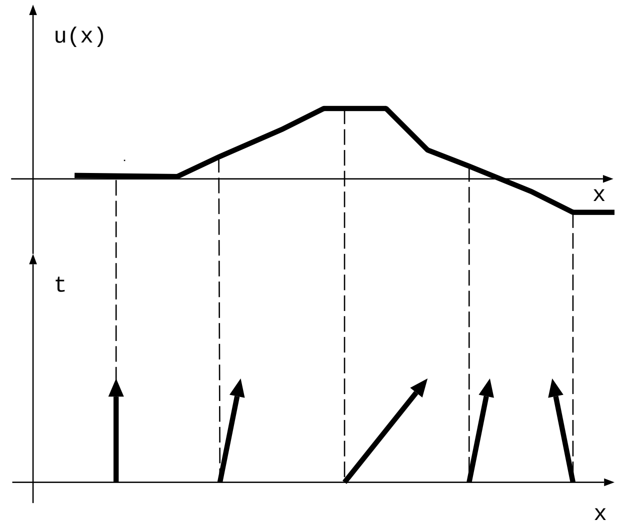

図 2.2: 非粘性バーガーズ方程式の波形（上）と特性線の傾き（下）の関係。振幅の大きな部分が早い特性スピードを持ち次第に波形がつったって来る。

振幅の大きな部分が早い特性スピードを持ち次第に波形がつったって来る。最終的に後ろから来た特性線が前からのものに追いつくところでは物理量が不連続になり実存の気体中では衝撃波を生じる。実際の衝撃波では、ここまで考慮していなかった熱伝導、粘性などの輸送現象が重要になって気体の平均自由行程程度で物理状態が変化するがその平均自由行程程度より大きな通常の気体のスケールで考えれば物理量が不連続になるように見える。

等温ガス

式 (2.52) で音速を一定とすると、等温ガスに対する基礎方程式が得られる。ここで $\rho u = m$ と書いて従属変数を

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ m \end{pmatrix}, \tag{2.81}$$

と書き直すと、流束の方はこれらを使って

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} m \\ a^2\rho + \dfrac{m^2}{\rho} \end{pmatrix}, \tag{2.82}$$

のように書ける。音速の値が一定であることを強調するためにここでは $c_s = a$ と書いておくことにする。次に、基礎方程式を移流方程式型に書き換えると、

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \rho \\ m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a^2 - \frac{m^2}{\rho^2} & \frac{2m}{\rho} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} \rho \\ m \end{pmatrix} = 0, \tag{2.83}$$

のようになる。

この式は線形のガスダイナミクス方程式で行なったのと同じ方法で対角化を行なうことができて、A のこの固有値は

$$\lambda_1 = \frac{m}{\rho} - a = u - a, \tag{2.84}$$

$$\lambda_2 = \frac{m}{\rho} + a = u + a, \tag{2.85}$$

であることがわかる。それぞれの固有値に属する固有ベクトルは、

$$\boldsymbol{r}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ u-a \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{r}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ u+a \end{pmatrix}, \tag{2.86}$$

なので、対角化する行列は

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ u-a & u+a \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} \frac{u+a}{2a} & -\frac{1}{2a} \\ -\frac{u-a}{2a} & \frac{1}{2a} \end{pmatrix}, \tag{2.87}$$

で、

$$\boldsymbol{LAR} = \boldsymbol{\Lambda}, \quad \boldsymbol{R\Lambda L} = \boldsymbol{A}, \tag{2.88}$$

のように対角化される。

2.4　衝撃波

非粘性バーガーズ方程式 (2.3.3 節) に関してリーマン問題を考える。ここでは簡単のために $u > 0$ の場合のみを考えるが、$u < 0$ の場合についても容易に理解できよう。

初期条件で左右の物理量の値の差が小さい場合は、$u_R > u_L$ であっても $u_R < u_L$ であっても図 2.4 下に見るように、物理量の不連続は、u で右に伝搬する。ところが、不連続が非線形の場合には、(1) 初期に $U_L = u_L$、$U_R = u_R$ で $u_L > u_R$ である場合は、$x < 0$ からでる特性線が $x > 0$ からでる特性線に追い付くことになる。u_L を運んでくる波と u_R を運んでくる波が同じ点に到達するので不連続が発生する（図 2.3 上）。流体力学の場合この不連続は衝撃波と呼ばれる。

その逆に、(2)$u_L < u_R$ である場合（図 2.3 下、図 2.4 上右）は、u_L と u_R の間の不連続が同様に右へ伝搬して行く可能性があるが、このような、特性線の重なりによらない不連続の生成は物理的には起こり得ず、また、流体力学で生ずる衝撃波に当てはめると不連続を前面から後面に通り過ぎる間に気体のエントロピーが減少する場合に相当しており、物理的には起こり得ない（エントロピー条件）。

$u_L < u_R$ である場合は、希薄波と呼ばれる構造が出現し、位相空間で希薄波の Head と示された点から希薄波の Tail と示された点まで u の値が線形に変化しそれに応じて特性線の傾きも次第に変化する流れを生ずる。

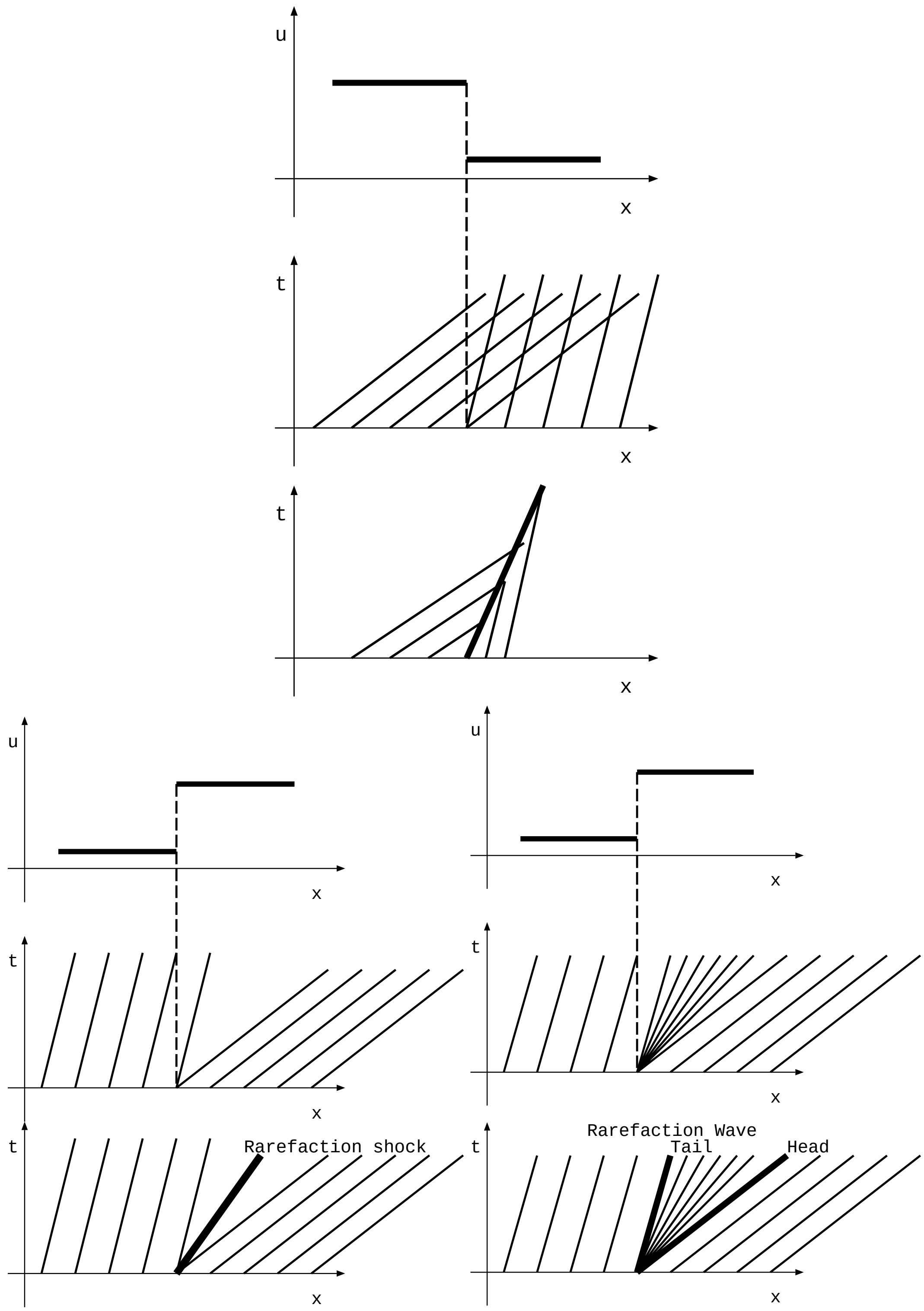

図 2.3: 非粘性バーガーズ方程式のリーマン問題。（上）$u_L > u_R$ の場合、特性線の重なりが衝撃波を形成する。（左下）$u_L < u_R$ の場合、特性線は遠ざかって行く、この場合、u_L と u_R を不連続で接続する解（膨張衝撃波）は、非物理的で、（右下）の希薄波をはさんで物理量が u_L から u_R まで連続的に変化する現象が実現する。

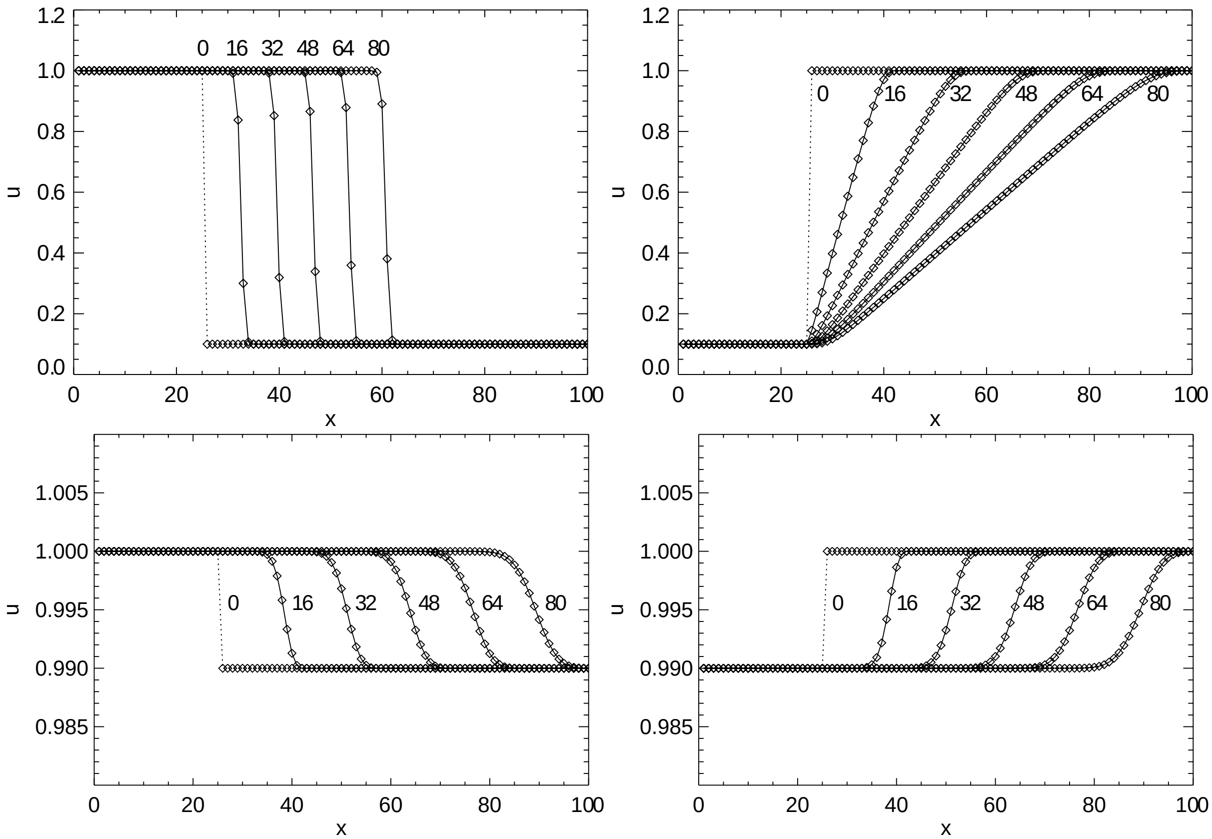

図 2.4: 非粘性バーガーズ方程式のリーマン問題。（左）$u_L = 1$、$u_R = 0.1$ の場合、衝撃波型 $(t = 0.8 \times [0, 16, 32, 48, 64, 80])$ 。（右）$u_L = 0.1$、$u_R = 1$ の場合、希薄波型 $(t = 0.8 \times [0, 16, 32, 48, 64, 80])$。下はそれぞれ、振幅が微小で線形な系としてふるまう場合で、（左）$u_L = 1$、$u_R = 0.99$ の場合と（右）$u_L = 0.99$、$u_R = 1$ の場合。

2.4.1 ランキン・ユゴニオ関係

保存系の流体力学の1次元の基礎方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x} = 0, \tag{2.89}$$

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ e \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x^2 + p \\ (e+p)v_x \end{bmatrix}, \tag{2.90}$$

を、空間の決まった2点 x_L から x_R まで積分する。その間に衝撃波を含みその位置 $x_S(t)$ は時間とともに速度 $V = dx_S(t)/dt$ で移動するとする。

$$\frac{d}{dt}\int_{x_L}^{x_S} \boldsymbol{U}(x,t)dx + \frac{d}{dt}\int_{x_S}^{x_R} \boldsymbol{U}(x,t)dx = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}(x_L,t)) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}(x_R,t)), \tag{2.91}$$

のようになる。左辺を書き換えると、

$$[\boldsymbol{U}(x_{S_L}) - \boldsymbol{U}(x_{S_R})]\, V + \int_{x_L}^{x_S} \frac{\partial \boldsymbol{U}(x,t)}{\partial t}dx + \int_{x_S}^{x_R} \frac{\partial \boldsymbol{U}(x,t)}{\partial t}dx = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}(x_L,t)) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}(x_R,t)), \tag{2.92}$$

となる。ここで、$\boldsymbol{U}(x_{S_L})$ は衝撃波面へ左から近付いた $x = x_S - \epsilon(\epsilon > 0)$ での値、$\boldsymbol{U}(x_{S_R})$ は衝撃波面へ右から近付いた $x = x_S + \epsilon$ での値を表す。左辺の2つの積分は $x_L \to x_S$、$x_R \to x_S$ のように近付ければ小さくなるので、

$$[\boldsymbol{U}(x_{S_L}) - \boldsymbol{U}(x_{S_R})]\, V = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}(x_L,t)) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}(x_R,t)), \tag{2.93}$$

これをランキン・ユゴニオ関係と呼ぶ。流体力学の基礎方程式はガリレイ変換不変であるので、速度 V で移動する座標系に移っても式の形は変化しない。そこで、普通は衝撃波の伝搬速度と同じ速度で移動する座標系に移って、その座標系での速度 $\hat{v}_x = v_x - V$ を用いると、この系では

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}(x_L,t)) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}(x_R,t)) = 0, \tag{2.94}$$

であるから、

$$(\rho\hat{v}_x)_L = (\rho\hat{v}_x)_R \tag{2.95}$$

$$(\rho\hat{v}_x^2 + p)_L = (\rho\hat{v}_x^2 + p)_R \tag{2.96}$$

$$[(\hat{e}+p)\hat{v}_x]_L = [(\hat{e}+p)\hat{v}_x]_R \tag{2.97}$$

という衝撃波前面と後面の物理量の関係をつけるものをランキン・ユゴニオ関係と呼ぶ。

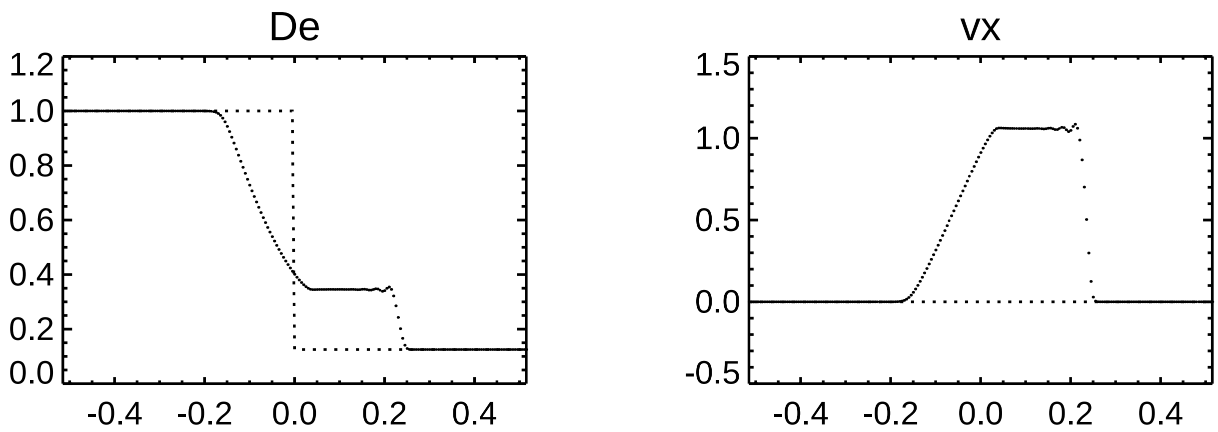

図 2.5: 等温の衝撃波管問題。点線は初期値 $\rho_L = 1(-0.5 < x < 0)$、$\rho_R = 0.125(0 < x < 0.5)$、$v_{xL} = v_{xR} = 0$, $c_s = 1$、実線は $t = 0.142$ の構造。計算法は修正ラックス・ベンドルフ法。右側に進んで行く等温衝撃波と、左側に進んで行く希薄波が生じていることがわかる。

2.4.2　磁気流体力学

結果のみを示すと流れの速度が衝撃波面に垂直な垂直衝撃波を考え、かつ磁場が衝撃波面に平行な向きをしている時、質量流束、運動量流束、エネルギー流束の表式から、

$$(\rho v_x)_L = (\rho v_x)_R \tag{2.98}$$

$$\left(\rho v_x + p + \frac{B^2}{8\pi}\right)_L = \left(\rho v_x + p + \frac{B^2}{8\pi}\right)_R \tag{2.99}$$

$$\left[\left(e + p + \frac{B^2}{4\pi}\right) v_x\right]_L = \left[\left(e + p + \frac{B^2}{4\pi}\right) v_x\right]_R \tag{2.100}$$

$$(v_x B)_L = (v_x B)_R \tag{2.101}$$

のようになる。

2.5　衝撃波管問題

時間 $t = 0$ での初期状態で圧力、密度などに不連続な分布を持っており時間発展をすると衝撃波を生ずるものを衝撃波管とよぶ。

ここではまず等温ガスに対して、初期に左側 $(x < 0)$ に $\rho = \rho_L$、右側 $(x > 0)$ に $\rho = \rho_R$ ただし、$\rho_L > \rho_R$ のような分布を考え、そこに生じる流れを調べる。

2.5.1　等温衝撃波

衝撃波に止まった系で、衝撃波前面の速度を u_1、衝撃波後面の速度を u_2、それぞれの密度を、ρ_1、ρ_2、とおくと、ランキン・ユゴニオ関係から、

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2, \tag{2.102}$$

$$\rho_1(u_1^2 + a^2) = \rho_2(u_2^2 + a^2), \tag{2.103}$$

ここで、式 (2.102) から

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = x, \tag{2.104}$$

と置くと、式 (2.103) は

$$x^2 - (\mathcal{M}_1^2 + 1)x + \mathcal{M}_1^2 = 0, \tag{2.105}$$

となる。ただし、ここで $\mathcal{M}$ はマッハ数で $\mathcal{M} \equiv u/a$ をあらわす。これから、

$$x = \mathcal{M}_1^2 = \left(\frac{u_1}{a}\right)^2 = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \tag{2.106}$$

よって、

$$u_1 u_2 = a^2 \tag{2.107}$$

となる。衝撃波の前方は静止していたとき、静止系から見た時の衝撃波後面の速度 U_2 は、衝撃波面の進む速度を $V_s = u_1$ として

$$U_2 = V_s - u_2 = V_s - \frac{a^2}{V_s}, \tag{2.108}$$

であり、衝撃波後面の密度は

$$\rho_2 = \rho_1 \left(\frac{V_s}{a}\right)^2 \tag{2.109}$$

となる。

2.5.2　等温の場合の Riemann 不変量

連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \tag{2.110}$$

を ρ で割ったもの

$$\frac{\partial \ln \rho}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial \ln \rho}{\partial x} = 0, \tag{2.111}$$

と、運動方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a^2}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \tag{2.112}$$

を等温音速 a で割ったもの、

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial t} + u\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial x} + a\frac{\partial \ln\rho}{\partial x} = 0, \tag{2.113}$$

から、式 (2.111) と式 (2.113) を加えると、

$$\frac{\partial(\ln\rho + \mathcal{M})}{\partial t} + (u+a)\frac{\partial(\ln\rho + \mathcal{M})}{\partial x} = 0, \tag{2.114}$$

また、式 (2.111) から式 (2.113) を引くと、

$$\frac{\partial \ln(\rho - \mathcal{M})}{\partial t} + (u-a)\frac{\partial(\ln\rho - \mathcal{M})}{\partial x} = 0, \tag{2.115}$$

が得られる。すなわち、

$$\text{特性線}\frac{dx}{dt} = u + a\ \text{上で、}\qquad J_+ = \ln\rho + \mathcal{M} = \text{一定} \tag{2.116}$$
$$\text{特性線}\frac{dx}{dt} = u - a\ \text{上で、}\qquad J_- = \ln\rho - \mathcal{M} = \text{一定} \tag{2.117}$$

この $J_\pm$ が等温の場合の Riemann 不変量である。

先に基礎方程式を対角化した時の変形を思いだそう（式 2.83-2.88)。

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \boldsymbol{A}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x} = 0, \tag{2.118}$$

を

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} + \lambda_1\frac{\partial w_1}{\partial x} = 0, \tag{2.119}$$
$$\frac{\partial w_2}{\partial t} + \lambda_2\frac{\partial w_2}{\partial x} = 0, \tag{2.120}$$
$$\tag{2.121}$$

のように書き換えた。この等温のガスダイナミクスでは、$dx/dt = u - a$ にそって、w_1 が一定、$dx/dt = u + a$ にそって、w_2 が一定に進化する。

流束ヤコビアン $\boldsymbol{A}$ が一定で、微分演算と交換する時は、

$$\boldsymbol{LU} = \boldsymbol{W}, \tag{2.122}$$

でこのベクトル $\boldsymbol{W}$ の成分 $(w^{(1)}, w^{(2)}, \ldots)$ が、特性線 $dx/dt = \lambda_1$、$dx/dt = \lambda_2$、$\ldots$、の上で一定（リーマン不変量と呼ぶ)、つまり

$$d\boldsymbol{W} = d(\boldsymbol{LU}) = 0, \tag{2.123}$$

になるが、一般に、流束ヤコビアン $\boldsymbol{A}$ が一定ではないが対角化できる時、どのような量が一定に保たれるかを考える。

式 (2.122) に対応するものが、

$$\boldsymbol{L}d\boldsymbol{U} = d\boldsymbol{W}, \tag{2.124}$$

であることは容易に理解できよう。これを成分表示すると、

$$(L)_{il}du_l = dw_i, \tag{2.125}$$

で、これは、du_j の間に関係があることをしめしている。i 番めの特性線に沿っては

$$(\boldsymbol{\ell}^{(i)})_l du_l = 0, \tag{2.126}$$

が成り立つ。

これを、等温ガスの場合に適応して、式 (2.116) と (2.117) の $J_\pm$ が不変量になっていることを示してみよう。式 (2.87) より、$\lambda_1 = u - a$ に対しては、左固有ベクトル（$\boldsymbol{L}$ の第1行目のベクトル $\boldsymbol{\ell}^{(1)}$）は、

$$\boldsymbol{\ell}^{(1)} = \begin{pmatrix} \dfrac{u+a}{2a} & -\dfrac{1}{2a} \end{pmatrix}, \tag{2.127}$$

で、式 (2.125) で、$u_1 = \rho$、$u_2 = \rho u$ であることに注意すると、

$$dw_1 = \frac{u+a}{2a}d\rho - \frac{1}{2a}d(\rho u) = 0, \tag{2.128}$$

展開すると

$$ad\rho - \rho du = 0, \tag{2.129}$$

これから

$$d(\mathcal{M} - \log\rho) = 0, \tag{2.130}$$

となり、式 (2.117) の J_- が保存量であることが確かめられた。式 (2.116) の J_+ については演習課題として残しておく。

問題 同じようにして、特性線 $dx/dt = u + a$ に沿って、J_+ が保存量であることを示せ。

2.5.3　等温の場合の衝撃波管の解析解

図 2.5 のような、等温の衝撃波管問題を考える。これを例に、衝撃波管問題を解析的に解くことを考えよう。

この初期値の設定に対しては、マイナス方向に希薄波が伝搬する。その上では右向きに伝わる特性線 $dx/dt = u + a$（C+）に沿って、J_+ が一定である。特性線 C_+ は、もっとも左側の静止している部分につながっていることに注意すると、

$$J_+ = \ln\rho + \mathcal{M} = \ln\rho_L, \tag{2.131}$$

ここで ρ_L はもっとも左側の静止している部分の密度である。これから、

$$\frac{\rho}{\rho_L} = \exp(-\mathcal{M}), \tag{2.132}$$

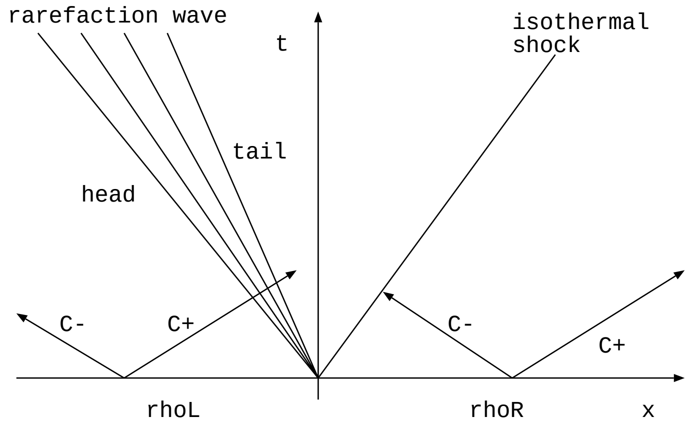

図 2.6: 等温の衝撃波管問題。

が成り立つ。希薄波のテール（この場合もっとも右側）の密度と速度が、衝撃波後面のそれ（u_2、ρ_2）に等しいことを用いると、

$$\frac{\rho_2}{\rho_L} = \exp\left(-\frac{u_2}{a}\right), \tag{2.133}$$

等温衝撃波の条件式 (2.108)、(2.109) から、もっとも右側の静止している衝撃波前面の密度 ρ_R と、もっとも左側の静止している希薄の先の密度 ρ_L と、衝撃波の速度の関係が以下のように得られる。

$$\frac{\rho_R \left(\frac{V_s}{a}\right)^2}{\rho_L} = \exp\left[-\left(\frac{V_s}{a} - \frac{a}{V_s}\right)\right], \tag{2.134}$$

これは $V_s/a = \xi$ とおくと、

$$\xi^2 \exp\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right) = \frac{\rho_L}{\rho_R}, \tag{2.135}$$

となる。この解は数値的に求めると、$\rho_L/\rho_R = 10$ のときに、$\xi = 1.75194...$ で $\xi - 1/\xi = 1.1811...$ のように求められる。

すなわち、初期の密度の不連続の位置を原点にとり、$a = 1$ とすると、

$$\rho = \begin{cases} \rho_R & x > \xi t \\ \rho_R \xi^2 & (\xi - \frac{1}{\xi} - 1)t < x < \xi t \\ \rho_L \exp(-\mathcal{M}) & -t < x < (\xi - \frac{1}{\xi} - 1)t \\ \rho_L & x < -t \end{cases} \tag{2.136}$$

$$u = \begin{cases} 0 & x > \xi t \\ \xi - \frac{1}{\xi} & (\xi - \frac{1}{\xi} - 1)t < x < \xi t \\ \dfrac{x+t}{t} & -t < x < (\xi - \frac{1}{\xi} - 1)t \\ 0 & x < -t \end{cases} \tag{2.137}$$

となる。これを数値計算の結果と比較する。

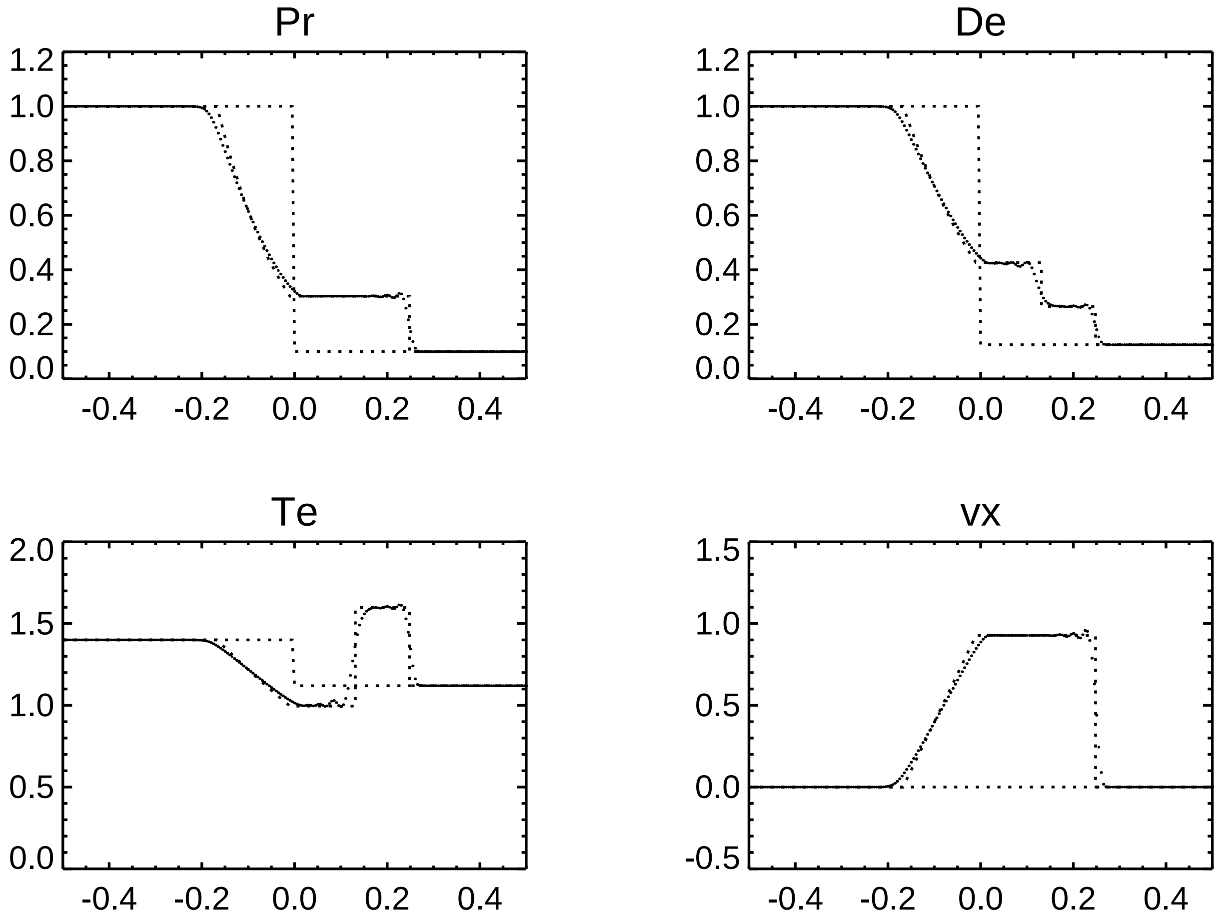

図 2.7: 断熱気体の衝撃波管問題。点線は初期値 $\rho_L = 1(-0.5 < x < 0)$、$\rho_R = 0.125(0 < x < 0.5)$、$p_L = 1(-0.5 < x < 0)$、$p_R = 0.1(0 < x < 0.5)$、$v_{xL} = v_{xR} = 0$, $\gamma = 1.4$、実線は $t = 0.142$ の構造。計算法は修正ラックス・ベンドルフ法。右側に進んで行く衝撃波と、左側に進んで行く希薄波、その間に接触不連続面が生じていることがわかる。

2.5.4　断熱気体の衝撃波管問題

一般の断熱気体については、第 3 章でその流束ヤコビアンの固有値、固有ベクトルなどを学ぶが、結果だけを述べると、

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \boldsymbol{M}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x} = 0, \tag{2.138}$$

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ v_x \\ p \end{pmatrix}, \boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} v_x & \rho & 0 \\ 0 & v_x & 1/\rho \\ 0 & \gamma p & v_x \end{pmatrix}, \tag{2.139}$$

は、固有値は音速 $c_s = (\gamma p/\rho)^{1/2}$ を使って、

$$\lambda_1 \;=\; u - c_s, \tag{2.140}$$

$$\lambda_2 = u, \tag{2.141}$$
$$\lambda_3 = u + c_s, \tag{2.142}$$
$$\tag{2.143}$$

であることがわかる。等温の場合との違いは、$u \pm c_s$ に加えて、$\lambda_2 = u$ で伝搬する波が加わったことである。

初期に不連続を持つ分布から進化した衝撃波管問題では、第 3 の特性線に対応して、衝撃波、希薄波以外に第 3 の不連続である接触不連続面が発生する場合がある。

固有値 λ_i に属する、左固有ベクトル $\boldsymbol{\ell}^{(i)}$ は、

$$\boldsymbol{\ell}^{(1)} = \frac{1}{2\rho c_s^2}(0, -\rho c_s, 1) \tag{2.144}$$
$$\boldsymbol{\ell}^{(2)} = \frac{1}{\rho c_s^2}\left(c_s^2, 0, -1\right) \tag{2.145}$$
$$\boldsymbol{\ell}^{(3)} = \frac{1}{2\rho c_s^2}(0, \rho c_s, 1) \tag{2.146}$$

になるから、先に導いたように、$\boldsymbol{L}d\boldsymbol{U}$ を作ると、

$$\frac{dx}{dt} = u - c_s \text{にそって} \quad \boldsymbol{\ell}^{(1)}d\boldsymbol{U} = \frac{1}{2\rho c_s^2}(-\rho c_s du + dp) = 0 \tag{2.147}$$
$$\frac{dx}{dt} = u \text{にそって} \quad \boldsymbol{\ell}^{(2)}d\boldsymbol{U} = \frac{1}{\rho c_s^2}\left(c_s^2 d\rho - dp\right) = 0 \tag{2.148}$$
$$\frac{dx}{dt} = u + c_s \text{にそって} \quad \boldsymbol{\ell}^{(3)}d\boldsymbol{U} = \frac{1}{2\rho c_s^2}(\rho c_s du + dp) = 0 \tag{2.149}$$

（λ_2 に属する波である）接触不連続面を越えては、$dx/dt = u - c_s$ と $dx/dt = u + c_s$ の特性線が左右を結んでいる。したがって接触不連続面越の左右で、

$$-\rho c_s du + dp = 0 \tag{2.150}$$

$$\rho c_s du + dp = 0 \tag{2.151}$$

となっていなければならないことがわかる。これから $dp = 0$、$du = 0$ すなわち接触不連続面では圧力と速度のとびは許されず、密度（及び温度）のみが不連続になることがわかる。

断熱気体の流体力学での Riemann 不変量

λ_1 に属する（つまり $dx/dt = u - c_s$ の特性線が関係する）希薄波では、$J_+ = u + 2c_s/(\gamma - 1)$ および、エントロピー s が一定、λ_3 に属する希薄波では、$J_- = u - 2c_s/(\gamma - 1)$ および、エントロピー s が一定となる。

これは以下のようにして示すことができる。λ_1 に属する特性線を跨いで、

$$\frac{dx}{dt} = u \text{ にそって} \quad \boldsymbol{\ell}^{(2)} d\boldsymbol{U} \quad = \frac{1}{\rho c_s^2}\left(c_s^2 d\rho - dp\right) = 0 \tag{2.152}$$

$$\frac{dx}{dt} = u + c_s \text{にそって} \quad \boldsymbol{\ell}^{(3)} d\boldsymbol{U} \quad = \frac{1}{2\rho c_s^2}\left(\rho c_s du + dp\right) = 0 \tag{2.153}$$

が成り立つが、これから、

$$\rho c_s du + c_s^2 d\rho = 0, \tag{2.154}$$

これから、

$$\int du + \int \frac{c_s}{\rho} d\rho = 0, \tag{2.155}$$

が得られる。c_s が $\rho^{(\gamma-1)/2}$ に比例することを用いると、第2項も積分できて、

$$u + \frac{2c_s}{\gamma - 1} = J_+, \tag{2.156}$$

が一定値をとる。

λ_3 に属する特性線を跨いでも同様の議論ができて、

$$u - \frac{2c_s}{\gamma - 1} = J_-, \tag{2.157}$$

が一定値をとることが示せる。

2.5.5 断熱気体の衝撃波管問題解析解 *

等温の時に示したように、断熱ガスの衝撃波管問題についても、iteration を用いて解析的に解を求めることができる（リーマン解法プログラムと呼ぶ）。興味ある方々は以下を読んでいただきたい。

初期の密度、圧力、速度が、$x < 0$ に対しては、$\boldsymbol{U}_L = (\rho_L, p_L, u_L)$、$x > 0$ に対しては、$\boldsymbol{U}_R = (\rho_R, p_R, u_R)$ である Riemann 問題を考える（図 2.8 参照）。これらの値の組合せによって、左右には衝撃波もしくは希薄波が伝搬する。左側に伝わる波（衝撃波もしくは希薄波）の先の領域は $\boldsymbol{U}_L$ の状態が、右側に伝わる波（衝撃波もしくは希薄波）の先の領域は $\boldsymbol{U}_R$ の状態が、保たれている。その間、$\boldsymbol{U}_L$ と $\boldsymbol{U}_R$ 両方に依存する中間（希薄波のテールの外、衝撃波の後ろ面）の領域の速度と圧力が u_* と p_* を求めよう。

p_* は、次の方程式の解 p で与えられる。

$$f(p, \boldsymbol{U}_L, \boldsymbol{U}_R) \equiv f_L(p, \boldsymbol{U}_L) + f_R(p, \boldsymbol{U}_R) + \Delta u = 0, \tag{2.158}$$

ここで、

$$\Delta u \equiv u_R - u_L, \tag{2.159}$$

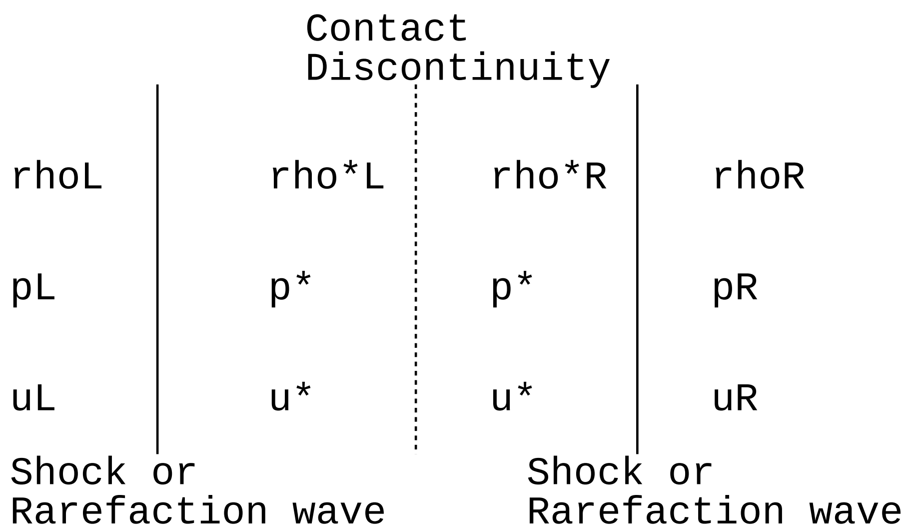

図 2.8: 断熱気体の衝撃波管問題。断熱気体の場合は、真空が現れない普通の問題については、$dx/dt = u \pm c_s$ の特性線に関連した非線形の波が衝撃波か希薄波として現れ、その中間に、接触不連続面を生じる。初期の密度、圧力、速度が、$x < 0$ に対しては、ρ_L、p_L、u_L、$x > 0$ に対しては、ρ_R、p_R、u_R であるとき、中間（希薄波のテールの外、衝撃波の後ろ面）の速度と圧力が u_* と p_*、接触不連続面の左側の密度が ρ_{*L}、右側の密度が ρ_{*R}、衝撃波の速度が V_s であるとして、それらの間の関係を求めることによって、衝撃波管問題の解を求めることができる。

である。ここで、f_L と f_R は左、右に進む不連続が衝撃波か希薄波かによって次のように与えられる。

$$f_L(p, \boldsymbol{U}_L) = \begin{cases} (p - p_L)\left(\dfrac{A_L}{p + B_L}\right)^{1/2} & \text{if} \quad p > p_L \quad \text{(shock)} \\ \dfrac{2a_L}{\gamma - 1}\left[\left(\dfrac{p}{p_L}\right)^{(\gamma-1)/(2\gamma)} - 1\right] & \text{if} \quad p < p_L \quad \text{(rarefaction)} \end{cases} \tag{2.160}$$

$$f_R(p, \boldsymbol{U}_R) = \begin{cases} (p - p_R)\left(\dfrac{A_R}{p + B_R}\right)^{1/2} & \text{if} \quad p > p_R \quad \text{(shock)} \\ \dfrac{2a_R}{\gamma - 1}\left[\left(\dfrac{p}{p_R}\right)^{(\gamma-1)/(2\gamma)} - 1\right] & \text{if} \quad p < p_R \quad \text{(rarefaction)} \end{cases} \tag{2.161}$$

ここで、

$$\begin{aligned} A_L &= \frac{2}{(\gamma+1)\rho_L}, \\ A_R &= \frac{2}{(\gamma+1)\rho_R}, \\ B_L &= \frac{\gamma-1}{\gamma+1}p_L, \\ B_R &= \frac{\gamma-1}{\gamma+1}p_R, \end{aligned} \tag{2.162}$$

である。

この解を使って、u_* は

$$u_* = \frac{u_L + u_R}{2} + \frac{f_R(p_*) - f_L(p_*)}{2} \tag{2.163}$$

で与えられる。

左に進む衝撃波

左に進む衝撃波の場合の f_L を求めてみよう。左に進む衝撃波の速度を $V_L < 0$ とする。V_L で動く座標での、ガスの速度は、$\hat{u}_L = u_L - V_L$、$\hat{u}_* = u_* - V_L$ である。ランキン・ユゴニオ条件（式 2.97）は

$$\rho_L \hat{u}_L = \rho_{*L} \hat{u}_*, \tag{2.164}$$

$$\rho_L \hat{u}_L^2 + p_L = \rho_{*L} \hat{u}_*^2 + p_*, \tag{2.165}$$

$$(\hat{e}_L + p_L)\hat{u}_L = (\hat{e}_{*L} + p_*)\hat{u}_*, \tag{2.166}$$

で与えられる。ここで、ρ_{*L} は接触不連続面の左側で左へ進む衝撃波の右側の密度を、$\hat{e}_{*L}$ は接触不連続面の左側で左へ進む衝撃波の右側のガスの V_L で動く座標で見た全エネルギーである。

通常行なうように、質量流束（式 2.164）を

$$Q_L = \rho_L \hat{u}_L = \rho_{*L} \hat{u}_* \tag{2.167}$$

とおいて、他の式を書き換える。運動量流束の式 (2.165) から、

$$Q_L = -\frac{p_* - p_L}{\hat{u}_* - \hat{u}_L} = -\frac{p_* - p_L}{u_* - u_L}, \tag{2.168}$$

したがって、u_* を求める式として

$$u_* = u_L - \frac{p_* - p_L}{Q_L}, \tag{2.169}$$

が得られる。

また、$\hat{u}_L = Q_L/\rho_L$、$\hat{u}_* = Q_L/\rho_{*L}$ を式（2.168）に代入すると、

$$Q_L^2 = -\frac{p_* - p_L}{\dfrac{1}{\rho_{*L}} - \dfrac{1}{\rho_L}} \tag{2.170}$$

となる。ランキン・ユゴニオ関係から密度と圧力の不連続の間の関係

$$\frac{\rho_L}{\rho_{*L}} = \frac{\dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}\dfrac{p_*}{p_L}}{\dfrac{\gamma-1}{\gamma+1} + \dfrac{p_*}{p_L}} \tag{2.171}$$

を、この式 (2.170) に代入すると、

$$Q_L^2 = \frac{\gamma+1}{2}\left(p_* + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}p_L\right)\rho_L \tag{2.172}$$

がえられる。これを式 (2.169) に代入すると、u_* と p_* の間の関係を表す式が得られ、

$$u_* = u_L - (p_* - p_L)\left[\frac{\gamma+1}{2}\left(p_* + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}p_L\right)\rho_L\right]^{-1/2}, \tag{2.173}$$

となり、この式は

$$u_* = u_L - f_L(p_*, \boldsymbol{U}_L), \tag{2.174}$$

で

$$f_L(p_*, \boldsymbol{U}_L) = (p_* - p_L)\left[\frac{A_L}{p_* + B_L}\right]^{1/2} \tag{2.175}$$

および

$$A_L = \frac{2}{(\gamma+1)\rho_L}, \quad B_L = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}p_L \tag{2.176}$$

これは、衝撃波を通り抜けた後の u_* と p_* の間の関係を表す式で、先に上げた式 (2.160) の衝撃波の場合に一致する。

左に進む希薄波

希薄波の内部ではエントロピーの生成は起こらないので（起こるのは衝撃波のみ）、希薄波をはさんで

$$\rho_{*L} = \rho_L \left(\frac{p_*}{p_L} \right)^{1/\gamma} \tag{2.177}$$

が成り立つ。

式 (2.156) のリーマン不変量 J_+ が左に進む希薄波を越えて一定であることを用いると、

$$u_L + \frac{2c_{sL}}{\gamma - 1} = u_* + \frac{2c_{s*L}}{\gamma - 1} \tag{2.178}$$

が成り立つ。ここで、音速 c_{s*L} を

$$c_{s*L} = c_{sL} \left(\frac{p_*}{p_L} \right)^{(\gamma-1)/(2\gamma)}, \tag{2.179}$$

で書き換えると、

$$u_* = u_L + \frac{2c_{sL}}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{p_*}{p_L} \right)^{(\gamma-1)/(2\gamma)} \right] \tag{2.180}$$

となる。これは、希薄波を通り抜けたガスがもつ u_* と p_* の間の関係を記述している。最初に上げた式で希薄波の場合、すなわち、

$$u_* = u_L - f_L(p_*, \boldsymbol{U}_L), \tag{2.181}$$

$$f_L(p_*, \boldsymbol{U}_L) = \frac{2c_{sL}}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{p_*}{p_L} \right)^{(\gamma-1)/(2\gamma)} - 1 \right], \tag{2.182}$$

と一致している。

右に進む衝撃波

左に進む場合と同様の計算を行なえば、

$$u_* = u_R + f_R(p_*, \boldsymbol{U}_R), \tag{2.183}$$

で

$$f_R(p_*, \boldsymbol{U}_R) = (p_* - p_R) \left[\frac{A_R}{p_* + B_R} \right]^{1/2} \tag{2.184}$$

および

$$A_R = \frac{2}{(\gamma + 1)\rho_R}, \quad B_R = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} p_R \tag{2.185}$$

右に進む希薄波

左に進む場合と同様の計算を行なえば、

$$u_* = u_R + f_R(p_*, \boldsymbol{U}_R), \tag{2.186}$$

$$f_R(p_*, \boldsymbol{U}_R) = \frac{2c_{sR}}{\gamma - 1}\left[\left(\frac{p_*}{p_R}\right)^{(\gamma-1)/(2\gamma)} - 1\right], \tag{2.187}$$

断熱ガスのリーマン解法

左側の波が与える u_* と右側のそれが等しい条件から、

$$u_R + f_R(p_*, \boldsymbol{U}_R) = u_L - f_L(p_*, \boldsymbol{U}_L), \tag{2.188}$$

書き換えると、

$$f_R(p_*, \boldsymbol{U}_R) + f_L(p_*, \boldsymbol{U}_L) + u_R - u_L = 0, \tag{2.189}$$

で、この式を、満足する p_* の値が実現する中間の領域の圧力である。p_* が一旦、求まれば、

$$u_* = u_R + f_R(p_*, \boldsymbol{U}_R), \tag{2.190}$$

または

$$u_* = u_L - f_L(p_*, \boldsymbol{U}_R), \tag{2.191}$$

を用いれば、中間の領域の速度が求められる。

最後に、衝撃波、希薄波の伝搬速度を求めておこう。左に進む衝撃波面の速度は

$$\rho_L(u_L - V_L) = \rho_{*L}(u_* - V_L) = Q_L \tag{2.192}$$

から

$$V_L = u_L - \frac{Q_L}{\rho_L}, \tag{2.193}$$

であり、式 (2.168) を用いれば、衝撃波の速度を決めることができる。

次に希薄波についても同じように左に進むものを考えると、希薄波の頭 (Head) と尾 (Tail) はそれぞれ異なるリーマン不変量を持つ $dx/dt = u - c_s$ で進む特性線に一致している。すなわち、希薄波の頭と尾の進行速度、S_{HL} および S_{TL} は

$$S_{HL} = u_L - a_L, \quad S_{TL} = u_* - a_{*L}, \tag{2.194}$$

となる。また、接触不連続面は

$$S_0 = u_*, \tag{2.195}$$

で伝搬する。

例題

図 2.7 に示した衝撃波管問題を解析的に解いてみよう。

$\rho_L = 1$、$\rho_R = 0.125$、$p_L = 1$、$p_R = 0.1$、$u_L = u_R = 0$、$\gamma = 1.4$ から、式 (2.158) を満足する p を数値的に求めると、$p_* = 0.30313$、$u_* = 0.92745$ のようになる。

これから、$\rho_{*L} = 0.42632$、$\rho_{*R} = 0.26557$、$S_{HL} = -1.18322$、$S_{TL} = -0.07027$、$S_0 = u_* = 0.92745$、$V_R = 1.75216$、$t = 0.142$ での位置を求めると、希薄波の頭 $x = -0.16802$、希薄波の尾の位置 $x = -0.00998$、衝撃波の位置 $x = 0.24881$ のように求めることができる。

練習問題：図 2.7 に示した衝撃波管問題の解析解を求めるプログラムを作成せよ。

参考文献

この章の参考文献として、以下のものを上げておく。

(1) 宇宙流体力学 坂下志郎、池内了 培風館
(2) 流体力学 巽友正 培風館
(3) 流体力学の数値計算法 藤井孝蔵 東京大学出版会（初期の版には誤植が多いので注意必要）
(4) Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics 2nd Edition E.F.Toro Springer 誤りあるので注意必要）

(1)、(2) はここで取り扱う圧縮性の流体力学についても詳しく記述してある教科書で、基礎方程式の導出、ランキン・ユゴニオ関係の導出など、ここで記述をはしょった部分について参考にして欲しい。(3)、(4) は数値流体力学の教科書。

第3章　流体および磁気流体力学方程式の風上差分

花輪知幸（千葉大先進）

3.1　はじめに

私たちは初日に移流方程式や Burgers 方程式の数値解法として、風上差分法を習った。風上差分法は衝撃波の取り扱いに優れていることや、非物理的な数値振動を起こさない (=TVD 条件を遵守する) ことを学んだ。昨日は、流体力学方程式や磁気流体力学方程式は波動方程式の集合体—システム方程式—であることを学んだ。この 2 日間の学習成果を総合すると、風上差分法は流体力学方程式や磁気流体力学方程式の数値解法としても有効であろうと容易に想像できる。実際、衝撃波を伴う (磁気) 流れを解析する方法として多くの数値計算コードに採用されている。

「流束は風上で評価せよ」という風上差分法の原理 (概念) は単純であるが、これを実際に流体力学方程式や磁気流体力学方程式に応用することは簡単ではない。最初に習った線型波動方程式は 1 成分で波の位相速度が一定であったのに対し、流体力学方程式は連立であり波の速度も時間や場所によって異なるためである。これらの違いをまとめたのが表 3.1 である。

名称	変数	自由度	線型/非線型	方程式
移流方程式	u	1	線型	3.1
Burgers 方程式	u	1	非線型	3.2, 3.3
Maxwell 方程式	$E_y,\, E_z,\, B_x,\, B_y$	4	線型	3.4, 3.5
流体力学方程式	$\rho,\, v,\, P$	3	非線型	3.6
磁気流体力学方程式	$\rho,\, v_x,\, v_y,\, v_z,\, B_y,\, B_z$	7	非線型	3.7

表 3.1: さまざまな波動方程式の比較。変数の数は独立変数を $(x,\, t)$ とした 1 次元の場合で数えた。

移流方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{3.1}$$

Burgers 方程式　[波の速度を明示した形式 (上) と流束を明示した形式 (下)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right) = 0 \tag{3.3}$$

(真空中の)Maxwell 方程式 [ベクトル形式と成分ごとに分解した形式]

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} &= 0 \\ \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} &= 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial t} + c\frac{\partial B_z}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial E_z}{\partial t} - c\frac{\partial B_y}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial B_y}{\partial t} - c\frac{\partial E_z}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial B_z}{\partial t} + c\frac{\partial E_y}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

流体力学方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ \dfrac{\rho v^2}{2} + \dfrac{P}{\gamma - 1} \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + P \\ \dfrac{\rho v^3}{2} + \dfrac{\gamma P v}{\gamma - 1} \end{pmatrix} = 0 \tag{3.6}$$

磁気流体力学方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho v_z \\ B_y \\ B_z \\ \rho E \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P + \dfrac{{B_y}^2 + {B_z}^2 - {B_x}^2}{8\pi} \\ \rho u v - \dfrac{B_x B_y}{4\pi} \\ \rho u w - \dfrac{B_x B_z}{4\pi} \\ B_y u - v B_x \\ B_z u - w B_x \\ \rho H u - \dfrac{B_x\left(B_x u + B_y v + B_z w\right)}{4\pi} \end{pmatrix} = 0 \tag{3.7}$$

$$E = \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + \frac{P}{(\gamma - 1)\rho} + \frac{{B_x}^2 + {B_y}^2 + {B_z}^2}{8\pi\rho} \tag{3.8}$$

$$H = \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + \frac{\gamma P}{(\gamma - 1)\rho} + \frac{{B_x}^2 + {B_y}^2 + {B_z}^2}{4\pi\rho} \tag{3.9}$$

この表では波動方程式が数学的に易しいほうから難しい方へと並べられている。Burgers 方程式は非線型なので移流方程式より難しい。Maxwell 方程式は連立方程式で変数が多いので難し

い。流体力学方程式は非線型である上に連立なので一層難しい。また変数が増えるので、磁気流体力学方程式はさらに一層難しい。

最初から流体力学方程式や磁気流体力学方程式の風上差分を考えるのは難しいので、本講義では最初に Maxwell 方程式を例にとり、連立方程式の解き方を学ぶ。次に Burgers 方程式の風上差分を簡単におさらいし、流体力学および磁気流体力学の風上差分を学ぶ。

3.2 Maxwell 方程式の数値解法

Maxwell 方程式 (3.5) の 1 段目と 4 段目の和と差、2 段目と 3 段目の和と差は

$$\frac{\partial}{\partial t}(E_y + B_z) + c\frac{\partial}{\partial x}(E_y + B_z) = 0 \tag{3.10}$$
$$\frac{\partial}{\partial t}(E_y - B_z) - c\frac{\partial}{\partial x}(E_y - B_z) = 0 \tag{3.11}$$
$$\frac{\partial}{\partial t}(E_z + B_y) - c\frac{\partial}{\partial x}(E_z + B_y) = 0 \tag{3.12}$$
$$\frac{\partial}{\partial t}(E_z - B_y) + c\frac{\partial}{\partial x}(E_z - B_y) = 0 \tag{3.13}$$

と表される。このように書き換えると 1 段目の従属変数は $E_y + B_z$ だけとなる。従って改めて $u = E_y + B_z$ と置き換えると、この方程式は移流方程式に変形できることが分かる。2 段目以降も同様なので、

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} + c\frac{\partial w_1}{\partial x} = 0 \tag{3.14}$$
$$\frac{\partial w_2}{\partial t} - c\frac{\partial w_2}{\partial x} = 0 \tag{3.15}$$
$$\frac{\partial w_3}{\partial t} - c\frac{\partial w_3}{\partial x} = 0 \tag{3.16}$$
$$\frac{\partial w_4}{\partial t} + c\frac{\partial w_4}{\partial x} = 0 \tag{3.17}$$
$$w_1 = E_y + B_z \tag{3.18}$$
$$w_2 = E_y - B_z \tag{3.19}$$
$$w_3 = E_z + B_y \tag{3.20}$$
$$w_4 = E_z - B_y \tag{3.21}$$
$$E_y = \frac{w_1 + w_2}{2} \tag{3.22}$$
$$E_z = \frac{w_3 + w_4}{2} \tag{3.23}$$
$$B_y = \frac{w_3 - w_4}{2} \tag{3.24}$$
$$B_z = \frac{w_1 - w_2}{2} \tag{3.25}$$

と書き換えられる。Maxwell 方程式は式 (3.14)-(3.17) のような移流方程式の集まりである。これらはそれぞれ独立なので、初日に習った風上差分法で解くことができる。この移流方程式の

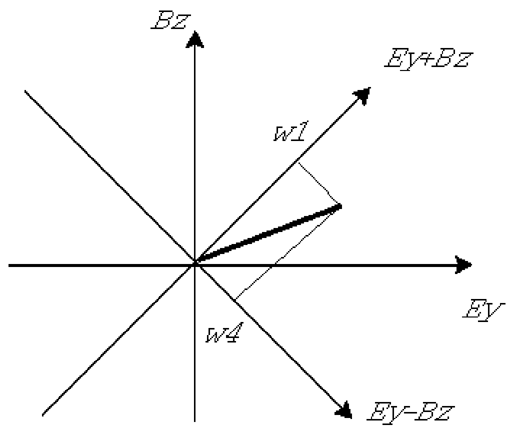

図 3.1: 変数 E_y, B_z, w_1, w_4 の関係を幾何学的に示した図。

変数 w_1, w_2, w_3, w_4 は式 (3.18)- (3.21) より求めることができる。また式 (3.22)-(3.25) を用いれば、E_y, E_z, B_y, B_z を求めることができる (図 3.2)。

[**発展問題**] 変数 $E_y + B_z$ や $E_y - B_z$ の物理的な意味を述べよ。

上記の結果を見通しよくするために、行列を使って計算してみよう。

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} E_y \\ E_z \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & -c & 0 \\ 0 & -c & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} E_y \\ E_z \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = 0 \tag{3.26}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{A}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} = 0 \tag{3.27}$$

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} E_y \\ E_z \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \tag{3.28}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & -c & 0 \\ 0 & -c & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.29}$$

方程式 (3.27) を移流方程式 [式 (3.1)] と比較すると、変数 u がベクトルになったのに伴い、波の速度 c が行列 $\boldsymbol{A}$ に変化していることに気づく。Maxwell の方程式に現れる波の速度 $\pm c$ は、行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値として求めることができる。

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = 0 \tag{3.30}$$

ここで $\boldsymbol{I}$ は単位行列を表す。具体的に計算すると

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & c \\ 0 & -\lambda & -c & 0 \\ 0 & -c & -\lambda & 0 \\ c & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad (\lambda - c)^2 (\lambda + c)^2 = 0 \tag{3.31}$$

このようにして求まった固有値 (λ_k) と右固有ベクトル $(\boldsymbol{r}_k)$

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{r}_k = \lambda_k \boldsymbol{r}_k \tag{3.32}$$

$$\boldsymbol{r}_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_1 = c \tag{3.33}$$

$$\boldsymbol{r}_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_2 = -c \tag{3.34}$$

$$\boldsymbol{r}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_3 = -c \tag{3.35}$$

$$\boldsymbol{r}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_4 = c \tag{3.36}$$

が求められる。この右固有ベクトルと式 (3.22)-(3.25) が類似しているので、ベクトル $\boldsymbol{u}$ を右固有ベクトルの線型結合

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} E_y \\ E_z \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = w_1 \boldsymbol{r}_1 + w_2 \boldsymbol{r}_2 + w_3 \boldsymbol{r}_3 + w_4 \boldsymbol{r}_4 = \sum_{k=1}^{4} w_k \boldsymbol{r}_k \tag{3.37}$$

で表すことができる。これからの計算を簡単にするため、縦ベクトル $\boldsymbol{w}$、横ベクトル ${}^t\boldsymbol{w}$、行列 R を

$$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} \tag{3.38}$$

$${}^t\boldsymbol{w} = (w_1,\, w_2,\, w_3,\, w_4) \tag{3.39}$$

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{r}_1 \\ {}^t\boldsymbol{r}_2 \\ {}^t\boldsymbol{r}_3 \\ {}^t\boldsymbol{r}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \tag{3.40}$$

と定義すると

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{w} \tag{3.41}$$

と表すことができる。この行列 $\boldsymbol{R}$ の逆行列を $\boldsymbol{L}$ とすると、

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\ell}_1 \\ \boldsymbol{\ell}_2 \\ \boldsymbol{\ell}_3 \\ \boldsymbol{\ell}_4 \end{pmatrix} \tag{3.42}$$

$$\boldsymbol{\ell}_1 = (1/2,\, 0,\, 0,\, 1/2) = 2\,{}^t\boldsymbol{r}_1 \tag{3.43}$$

$$\boldsymbol{\ell}_2 = (1/2,\, 0,\, 0,\, -1/2) = 2\,{}^t\boldsymbol{r}_2 \tag{3.44}$$

$$\boldsymbol{\ell}_3 = (0,\, 1/2,\, 1/2,\, 0) = 2\,{}^t\boldsymbol{r}_3 \tag{3.45}$$

$$\boldsymbol{\ell}_4 = (0,\, 1/2,\, -1/2,\, 0) = 2\,{}^t\boldsymbol{r}_4 \tag{3.46}$$

従って逆行列 $\boldsymbol{L}$ は、$\boldsymbol{R}$ の行と列を入れ替え 2 倍したものに他ならない。これは固有ベクトルが互いに直行していて、その長さが $|\boldsymbol{r}_k|^2 = 2$ だからである。このため逆行列 $\boldsymbol{L}$ の各行もやはり行列 $\boldsymbol{A}$ の (左) 固有ベクトルとなる。

$$\boldsymbol{\ell}_k\boldsymbol{A} = \lambda_k\,\boldsymbol{\ell}_k \tag{3.47}$$

この逆行列を使うと、式 (3.18)-(3.21) は、

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{u} \tag{3.48}$$

とまとめられる。これは式 (3.41) に $\boldsymbol{L}$ を掛け、右辺と左辺を取り替えたものとも等しい。

このようにして決められた行列 $\boldsymbol{R}$ と $\boldsymbol{L}$ を使うと、

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{A}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} = 0 \tag{3.49}$$

$$\frac{\partial(\boldsymbol{L}\boldsymbol{u})}{\partial t} + \boldsymbol{\Lambda}\frac{\partial(\boldsymbol{L}\boldsymbol{u})}{\partial x} = 0 \tag{3.50}$$

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I} \tag{3.51}$$

$$\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} -c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c \end{pmatrix} \tag{3.52}$$

ここまでの一連の計算は、線型代数の時間に習った**行列の対角化**である。[1]

変数 $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{u}$ についての方程式は独立で線型な移流方程式の集まりなので、これらはそれぞれ 1 章で習った風上差分で解ける。求まった値を変換により $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{w}$ に戻せば Maxwell 方程式も解ける。

この節の教訓: 連立方程式 (システム方程式) では波の速度が行列で表されるので、行列の固有値・固有ベクトルを計算し、成分ごとの簡単な方程式にすると良い。

3.3　Burgers 方程式の復習と Maxwell 方程式の風上数値流束

Burgers 方程式では変数 u の値により波の位相速度が変わる。また Maxwell 方程式では成分により位相速度が $\pm c$ の値をとる。このように位相速度が一定で無い場合の風上数値流束を復習しよう。

Burgers 方程式の場合

$$u_j(t + \Delta t) = u_j(t) - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\tilde{f}_{j+1/2} - \tilde{f}_{j-1/2}) \tag{3.53}$$

$$\tilde{f}_{j+1/2} = \begin{cases} \dfrac{[u_j(t)]^2}{2} & [u_{j+1}(t) + u_j(t) > 0] \\ \dfrac{[u_{j+1}(t)]^2}{2} & [u_{j+1}(t) + u_j(t) \leq 0] \end{cases} \tag{3.54}$$

式 (3.54) は

$$\tilde{f}_{j+1/2} = \frac{1}{2}\left[\frac{[u_{j+1}(t)]^2 + [u_j(t)]^2}{2} - \left|\frac{u_{j+1} + u_j}{2}\right|(u_{j+1} - u_j)\right] \tag{3.55}$$

この結果から類推すると、対角化された Maxwell 方程式は

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial x} = \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{f}_w}{\partial x} = 0 \tag{3.56}$$

$$\boldsymbol{f}_w = \boldsymbol{L}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{w} \tag{3.57}$$

[1]第 2 章でも同様に行列の対角化を行った。

なので、これを風上差分化した公式は

$$\boldsymbol{w}_j(t + \Delta t) = \boldsymbol{w}_j(t) - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\tilde{\boldsymbol{f}}_{w,j+1/2} - \tilde{\boldsymbol{f}}_{w,j-1/2}) \tag{3.58}$$

$$\tilde{\boldsymbol{f}}_{w,j+1/2} = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{f}_{w,j+1} + \boldsymbol{f}_{w,j} - |\boldsymbol{\Lambda}|\,(\boldsymbol{w}_{j+1} - \boldsymbol{w}_j)\right] \tag{3.59}$$

と予想される。ここで行列 $|\boldsymbol{\Lambda}|$ は対角行列の絶対値なので、対角要素の絶対値をとったもの

$$|\boldsymbol{\Lambda}| = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix} = c \tag{3.60}$$

と定義する。

　元の変数で考えると

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{A}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{f}_u}{\partial x} = 0 \tag{3.61}$$

$$\boldsymbol{f}_u = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{u} \tag{3.62}$$

なので、これを風上差分化した公式は

$$\boldsymbol{u}_j(t + \Delta t) = \boldsymbol{u}_j(t) - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\tilde{\boldsymbol{f}}_{u,j+1/2} - \tilde{\boldsymbol{f}}_{w,j-1/2}) \tag{3.63}$$

$$\tilde{\boldsymbol{f}}_{u,j+1/2} = \boldsymbol{R}\,\tilde{\boldsymbol{f}}_{w,j+1/2} \tag{3.64}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{f}_{u,j+1} + \boldsymbol{f}_{u,j} - \boldsymbol{R}\,|\boldsymbol{\Lambda}|\,\boldsymbol{L}\,(\boldsymbol{u}_{j+1} - \boldsymbol{u}_j)\right] \tag{3.65}$$

式 (3.65) は流体力学で使う数値流束と形の上でそっくりとなる。

3.4　流体力学方程式の風上差分

　これまでに見てきたように、風上差分の計算では波の位相速度を求める操作が欠かせない。具体的には

1. 微分方程式を $\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{A}\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} = 0$ の形に書き直し、「速度行列」$\boldsymbol{A}$ を求める。
2. 速度行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値を求める。
3. 速度行列 $\boldsymbol{A}$ の固有ベクトルを求める。
4. 固有値と固有ベクトルより数値流束を求める。

という演算が必要である。以下ではそれぞれについて説明する。

ステップ1　速度行列を求める。

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x} = 0 \tag{3.66}$$

を合成関数の微分則を使って書き換えると、

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{A}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} = 0 \tag{3.67}$$

$$\boldsymbol{A} = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}} \tag{3.68}$$

$$(\boldsymbol{A})_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \tag{3.69}$$

が得られる。

流体力学方程式では

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ \dfrac{\rho v^2}{2} + \dfrac{P}{\gamma - 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix} \tag{3.70}$$

$$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + P \\ \dfrac{\rho v^3}{2} + \dfrac{\gamma P v}{\gamma - 1} \end{pmatrix} = \left\{ \begin{array}{c} \rho v \\ \dfrac{3-\gamma}{2}\dfrac{(\rho v)^2}{\rho} + (\gamma - 1)\left(\dfrac{\rho v^2}{2} + \dfrac{P}{\gamma - 1}\right) \\ \dfrac{\rho v}{\rho}\left[\dfrac{1-\gamma}{2}\dfrac{(\rho v)^2}{\rho} + \gamma(\rho E)\right] \end{array} \right\} \tag{3.71}$$

$$E = \frac{v^2}{2} + \frac{P}{(\gamma - 1)\rho} \tag{3.72}$$

$$H = \frac{v^2}{2} + \frac{\gamma P}{(\gamma - 1)\rho} \tag{3.73}$$

上記の変形は $\boldsymbol{f}$ を $\boldsymbol{u}$ で偏微分するため。2 章でも等温の場合に同様の変形を行った。

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\dfrac{3-\gamma}{2}v^2 & (3-\gamma)v & \gamma - 1 \\ \left(\dfrac{\gamma - 1}{2}v^2 - H\right)v & H - (\gamma - 1)v^2 & \gamma v \end{bmatrix} \tag{3.74}$$

ステップ 2　固有値を求める。

$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = 0$ より、

$$\lambda_1 = v + c_{\mathrm{s}} \tag{3.75}$$

$$\lambda_2 = v \tag{3.76}$$

$$\lambda_3 = v - c_{\mathrm{s}} \tag{3.77}$$

$$c_{\mathrm{s}} = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} \tag{3.78}$$

ステップ3 固有ベクトルを求める。

$$\boldsymbol{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ v + c_\mathrm{s} \\ H + v\,c_\mathrm{s} \end{pmatrix} \tag{3.79}$$

$$\boldsymbol{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ \dfrac{v^2}{2} \end{pmatrix} \tag{3.80}$$

$$\boldsymbol{r}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ v - c_\mathrm{s} \\ H - v\,c_\mathrm{s} \end{pmatrix} \tag{3.81}$$

$$\boldsymbol{\ell}_1 = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{2}\frac{\gamma-1}{c_\mathrm{s}^2} - \frac{u}{c_\mathrm{s}}\right),\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c_\mathrm{s}} - \frac{\gamma-1}{c^2}\,v\right),\ \frac{\gamma-1}{2\,c_\mathrm{s}^2}\right] \tag{3.82}$$

$$\boldsymbol{\ell}_2 = \left[1 - \frac{v^2}{2}\frac{\gamma-1}{c_\mathrm{s}^2},\ \frac{\gamma-1}{c_\mathrm{s}^2}\,v,\ -\frac{\gamma-1}{c_\mathrm{s}^2}\right] \tag{3.83}$$

$$\boldsymbol{\ell}_3 = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{2}\frac{\gamma-1}{c_\mathrm{s}^2} + \frac{u}{c_\mathrm{s}}\right),\ -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c_\mathrm{s}} + \frac{\gamma-1}{c^2}\,v\right),\ \frac{\gamma-1}{2\,c_\mathrm{s}^2}\right] \tag{3.84}$$

ここまでに見てきたように、流体力学方程式では速度行列 $\boldsymbol{A}$ が密度・速度・圧力の関数なので、場所によりその値が異なる。従って固有値や固有ベクトルも場所によって異なる。このため数値流束を計算する際に、**どこの密度・速度・圧力を使って計算するのか**という疑問がうまれる。これに対して Roe (1981) は

$$\bar{\rho} = \sqrt{\rho_{j+1}\rho_j} \tag{3.85}$$

$$\bar{v} = \frac{\sqrt{\rho_{j+1}}v_{j+1} + \sqrt{\rho_j}v_j}{\sqrt{\rho_{j+1}} + \sqrt{\rho_j}} \tag{3.86}$$

$$\bar{H} = \frac{\sqrt{\rho_{j+1}}H_{j+1} + \sqrt{\rho_j}H_j}{\sqrt{\rho_{j+1}} + \sqrt{\rho_j}} \tag{3.87}$$

$$\bar{c}_\mathrm{s}^2 = (\gamma - 1)\left(\bar{H} - \frac{\bar{v}^2}{2}\right) \tag{3.88}$$

を使って「平均量」を計算すれば良いことを見いだした。この平均の取り方を Roe 平均と呼ぶこともある。

Roe 平均で速度や単位質量当たりのエネルギーは $\sqrt{\rho}$ で重みをとった平均。一方、密度や圧力は $1/\sqrt{\rho}$ で重みをとった平均。ちょっと予想外なのは平均化された音速 ($\bar{c}_\mathrm{s}$)。音速は温度 (=

圧力と密度の比) によって決まるのだが、なぜか音速 $\bar{c}_\mathrm{s}$ の計算に速度 v も使う。式 (3.88) を計算すると、

$$\bar{c}_\mathrm{s}^2 = \gamma \frac{\dfrac{P_{j+1}}{\sqrt{\rho_{j+1}}} + \dfrac{P_j}{\sqrt{\rho_j}}}{\sqrt{\rho_{j+1}} + \sqrt{\rho_j}} + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{\sqrt{\rho_{j+1}\,\rho_j}}{(\sqrt{\rho_{j+1}} + \sqrt{\rho_j})^2} (v_{j+1} - v_j)^2 \tag{3.89}$$

が得られる。この式は、速度勾配があると ($v_{j+1} \neq v_j$)、その分だけ平均音速が上昇することを示している。

この Roe 平均で計算した $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}_{j+1}, \boldsymbol{u}_j)$ は任意 $\boldsymbol{u}_j$ と $\boldsymbol{u}_{j+1}$ に対して、**Property U** とよばれる以下の 3 条件、

i) $(\boldsymbol{f}_{j+1} - \boldsymbol{f}_j) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}_{j+1}, \boldsymbol{u}_j)(\boldsymbol{u}_{j+1}, -\boldsymbol{u}_j)$

ii) 固有値はすべて実数 (波の速度はすべて実数)

iii) $\boldsymbol{u}_{j+1} = \boldsymbol{u}_j$ の場合、$\boldsymbol{A} = \partial \boldsymbol{f} / \partial \boldsymbol{u}$

を満たす。時間の関係で省略するが、Property U を満たす平均の取り方はこれ一つに限られることも証明できる。詳しくは Hirsch あるいは藤井の教科書に書かれている。

$$\boldsymbol{u}_j(t + \Delta t) = \boldsymbol{u}_j(t) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{\boldsymbol{f}}_{u,j+1/2} - \tilde{\boldsymbol{f}}_{u,j-1/2}) \tag{3.90}$$

$$\tilde{\boldsymbol{f}}_{u,j+1/2} = \boldsymbol{R}\,\tilde{\boldsymbol{f}}_{w,j+1/2} \tag{3.91}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{f}_{u,j+1} + \boldsymbol{f}_{u,j} - \boldsymbol{R}\,|\boldsymbol{\Lambda}|\,\boldsymbol{L}\,(\boldsymbol{u}_{j+1} - \boldsymbol{u}_j)\right] \tag{3.92}$$

形式的には Maxwell 方程式の風上差分と同じであるが、波の速度行列 $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{LAR}$ は流れにより変化する量である。絶対値をとると

$$|\boldsymbol{\Lambda}| = \begin{pmatrix} |v + c| & 0 & 0 \\ 0 & |v| & 0 \\ 0 & 0 & |v - c| \end{pmatrix} \tag{3.93}$$

この節の教訓: 数値流束の計算に必要なものは、波の位相速度 (固有値 λ_k) と波の固有モード (固有ベクトル $\boldsymbol{r}_k$ と $\boldsymbol{\ell}_k$) である。これらの量は場所とともに変化するので、適切な平均量 (Roe 平均) を使う。

3.5 磁気流体力学方程式の風上差分化

流体力学方程式のところで分かったように数値流束に直接現れる量は、固有値と固有ベクトルである。磁気流体力学方程式では変数が増えるので計算がさらに厄介になる。ここでは計算結果だけを述べる。固有値や固有ベクトルは、流体力学方程式の時と同様に特殊な平均量を使って計算する。

ベクトル形式で記述した 1 次元磁気流体力学方程式

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ B_y \\ B_z \\ \rho E \end{pmatrix} \tag{3.94}$$

$$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P + \dfrac{{B_y}^2 + {B_z}^2 - {B_x}^2}{8\pi} \\ \rho u v - \dfrac{B_x B_y}{4\pi} \\ \rho u w - \dfrac{B_x B_z}{4\pi} \\ B_y u - v B_x \\ B_z u - w B_x \\ \rho H u - \dfrac{B_x \left(B_x u + B_y v + B_z w\right)}{4\pi} \end{pmatrix} , \tag{3.95}$$

$$E = \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + \frac{P}{(\gamma - 1)\,\rho} + \frac{{B_x}^2 + {B_y}^2 + {B_z}^2}{8\pi\rho} , \tag{3.96}$$

$$H = \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + \frac{\gamma P}{(\gamma - 1)\,\rho} + \frac{{B_x}^2 + {B_y}^2 + {B_z}^2}{4\pi\rho} , \tag{3.97}$$

1 次元の磁気流体力学方程式には、fast 波 (右向きと左向き)、slow 波 (右向きと左向き)、Alfvén 波 (右向きと左向き)、エントロピー波の 7 種類の波 (固有値・固有ベクトル) が存在する。流体力学で見てきたように、右向きと左向きの固有値と固有ベクトルは速度の符号が違うだけでよく似ている。紙数を節約するために以下では次のように fast 波、slow 波、Alfvén 波の固有値・固有ベクトルを次のようにまとめて記述する。

固有値と (右) 固有ベクトル

$$\boldsymbol{r}_{1,7} = \boldsymbol{R}_{u \pm c_f} , \quad \boldsymbol{r}_{2,6} = \boldsymbol{R}_{u \pm b_x} , \quad \boldsymbol{r}_{3,5} = \boldsymbol{R}_{u \pm c_s} , \quad \boldsymbol{r}_4 = \boldsymbol{R}_u , \tag{3.98}$$

$$\lambda_{1,7} = \bar{u} \pm c_f , \quad \lambda_{2,6} = \bar{u} \pm b_x , \quad \lambda_{3,5} = \bar{u} \pm c_s , \quad \lambda_4 = \bar{u} , \tag{3.99}$$

流体力学の時と同様に、これらの固有値と固有ベクトルは $\boldsymbol{u}_j$ と $\boldsymbol{u}_{j+1}$ の平均量を使って評価する必要がある。Brio & Wu (1988) は $\gamma = 2$ の場合に、Property U を満たす平均が存在することを示した。Brio & Wu (1988) に比べて少し複雑ではあるが、現在は一般の γ に対して Property U を満たす固有値・固有ベクトルも知られている。以下では一般の γ について Property U を満たす固有値・固有ベクトルを示す。[2]

[2] Property U の条件 (i) は第 2 章で習った衝撃波のランキンユゴニオ条件と関係がある。どちらも非線型性を考慮している。

$$
\boldsymbol{R}_{u\pm c} = \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{u} \pm c \\ \bar{v} \mp \dfrac{B_x \bar{B}_y c}{4\pi\bar{\rho}(c^2 - {b_x}^2)} \\ \bar{w} \mp \dfrac{B_x \bar{B}_z c}{4\pi\bar{\rho}(c^2 - {b_x}^2)} \\ \dfrac{\bar{B}_y c^2}{\bar{\rho}(c^2 - {b_x}^2)} \\ \dfrac{\bar{B}_z c^2}{\bar{\rho}(c^2 - {b_x}^2)} \\ \dfrac{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2}{2} + \dfrac{c^2}{\gamma - 1} \pm c\bar{u} + \chi + \delta b^2 \end{bmatrix}, \tag{3.100}
$$

$$
\boldsymbol{R}_{u\pm b_x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mp\bar{B}_z \operatorname{sgn}(Bx) \\ \pm\bar{B}_y \operatorname{sgn}(B_x) \\ \bar{B}_z\sqrt{\dfrac{4\pi}{\bar{\rho}}} \\ -\bar{B}_y\sqrt{\dfrac{4\pi}{\bar{\rho}}} \\ \mp(\bar{B}_z\bar{v} - \bar{B}_y\bar{w}) \operatorname{sgn}(B_x) \end{bmatrix} \tag{3.101}
$$

$$
\boldsymbol{R}_u = \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2}{2} + \delta b^2 \end{bmatrix} \tag{3.102}
$$

$$
\chi = \mp\frac{B_x c\,(\bar{B}_y\bar{v} + \bar{B}_z\bar{w})}{4\pi\bar{\rho}\,(c^2 - b_x^2)} + \frac{\gamma - 2}{\gamma - 1}(c^2 - a^2) \tag{3.103}
$$

$$
\delta b^2 = \frac{\gamma - 2}{\gamma - 1}\,\frac{(B_{y,\,j+1} - B_{y,\,j})^2 + (B_{z,\,j+1} - B_{z,\,j})^2}{8\pi\,(\sqrt{\rho_{j+1}} + \sqrt{\rho_j})^2} \tag{3.104}
$$

$$
{c_{f,\,s}}^2 = \frac{{a_*}^2 \pm \sqrt{a_*^4 - 4a^2{b_x}^2}}{2} \tag{3.105}
$$

$$
b_x = \frac{|B_x|}{\sqrt{4\pi\bar{\rho}}} \tag{3.106}
$$

$$
{a_*}^2 = (\gamma - 1)\Big(\bar{H} - \frac{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2}{2} - \delta b^2\Big) - (\gamma - 2)\Big(\frac{{B_x}^2 + {\bar{B}_y}^2 + {\bar{B}_z}^2}{4\pi\bar{\rho}}\Big) \tag{3.107}
$$

$$a^2 = (\gamma - 1)\left(\bar{H} - \frac{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2}{2} - \delta b^2 - \frac{B_x{}^2 + \bar{B}_y{}^2 + \bar{B}_z{}^2}{4\pi\bar{\rho}}\right) \tag{3.108}$$

$$\bar{v} = \frac{\sqrt{\rho_j}v_j + \sqrt{\rho_{j+1}}v_{j+1}}{\sqrt{\rho_j} + \sqrt{\rho_{j+1}}} \tag{3.109}$$

$$\bar{w} = \frac{\sqrt{\rho_j}w_j + \sqrt{\rho_{j+1}}w_{j+1}}{\sqrt{\rho_j} + \sqrt{\rho_{j+1}}} \tag{3.110}$$

$$\bar{B}_y = \frac{\sqrt{\rho_{j+1}}B_{y,j} + \sqrt{\rho_j}B_{y,j+1}}{\sqrt{\rho_j} + \sqrt{\rho_{j+1}}} \tag{3.111}$$

$$\tilde{B}_y = \frac{B_{y,j} + B_{y,j+1}}{2} \tag{3.112}$$

$$\bar{B}_z = \frac{\sqrt{\rho_{j+1}}B_{z,j} + \sqrt{\rho_j}B_{z,j+1}}{\sqrt{\rho_j} + \sqrt{\rho_{j+1}}}, \tag{3.113}$$

$$\tilde{B}_z = \frac{B_{z,j} + B_{z,j+1}}{2} \tag{3.114}$$

上記の公式で (3.100) は、fast 波と slow 波の両方の固有ベクトルを表している。波の速度 c に c_f を代入すれば fast 波の固有ベクトルが、c_s を代入すれば slow 波の固有ベクトルが得られる。また c_s との混同を避けるため、音速は a で表されている。

実際に磁気流体力学方程式の数値流束を計算するためには、上記の式に少し工夫を加える必要がある。工夫が必要となるのは、固有値が等しくなる (縮退する) 場合である。気をつけて上記の式を運用しないと、固有ベクトルが独立でなくなる場合がある。この問題を回避するために、Ryu & Jones (1995) は変数に工夫を凝らした。上記の公式にこの工夫を加えると以下のようになる。

$$\boldsymbol{R}_{1,7} = \begin{bmatrix} \alpha_f \\ \alpha_f\,(\bar{u} \pm c_f) \\ \alpha_f\bar{v} \mp \alpha_s\beta_y b_x\,\mathrm{sgn}\,(B_x) \\ \alpha_f\bar{w} \mp \alpha_s\beta_z b_x\,\mathrm{sgn}\,(B_x) \\ \alpha_s\beta_y c_f\sqrt{4\pi/\bar{\rho}} \\ \alpha_s\beta_z c_f\sqrt{4\pi/\bar{\rho}} \\ \alpha_f\left\{\dfrac{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2}{2} + \delta b^2 \pm c_f\bar{u} + \dfrac{c_f{}^2}{\gamma - 1}\right. \\ \left. + \dfrac{\gamma - 2}{\gamma - 1}(c_f{}^2 - a^2)\right\} \mp \alpha_s b_x \mathrm{sgn}(B_x)\,(\beta_y\bar{v} + \beta_z\bar{w}) \end{bmatrix} \tag{3.115}$$

$$
\boldsymbol{R}_{2,6} \;=\; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mp\beta_z \,\mathrm{sgn}(B_x) \\ \pm\beta_y \,\mathrm{sgn}(B_x) \\ \beta_z \sqrt{4\pi/\bar{\rho}} \\ -\beta_y \sqrt{4\pi/\bar{\rho}} \\ \mp\left(\beta_z\bar{v} \;-\; \beta_y\bar{w}\right)\mathrm{sgn}(B_x) \end{bmatrix} \tag{3.116}
$$

$$
\boldsymbol{R}_{3,5} \;=\; \begin{bmatrix} \alpha_s \\ \alpha_s \left(\bar{u} \;\pm\; c_s\right) \\ \alpha_s\bar{v} \;\pm\; \alpha_f\beta_y a \,\mathrm{sgn}\left(B_x\right) \\ \alpha_s\bar{w} \;\pm\; \alpha_f\beta_z a \,\mathrm{sgn}\left(B_x\right) \\ -\dfrac{\alpha_f\,\beta_y a^2\sqrt{4\pi}}{c_f\sqrt{\bar{\rho}}} \\ -\dfrac{\alpha_f\,\beta_z a^2\sqrt{4\pi}}{c_f\sqrt{\bar{\rho}}} \\ \alpha_s\Big\{\dfrac{\bar{u}^2 \;+\bar{v}^2 \;+\bar{w}^2}{2} \;+\; \delta b^2 \;\pm\; c_s\bar{u} \;+\; \dfrac{{c_s}^2}{\gamma \;-\; 1} \;+\; \dfrac{\gamma \;-\; 2}{\gamma \;-\; 1}({c_s}^2 \;-\; a^2)\Big\} \\ \pm\alpha_f a \mathrm{sgn}(B_x)\left(\beta_y\bar{v} \;+\; \beta_z\bar{w}\right) \end{bmatrix} \tag{3.117}
$$

$$
\boldsymbol{R}_4 \;=\; \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{\bar{u}^2 \;+\; \bar{v}^2 \;+\bar{w}^2}{2} \;+\; \delta b^2 \end{bmatrix} \tag{3.118}
$$

$$
\alpha_f \;=\; \frac{\sqrt{{c_f}^2 \;-\; {b_x}^2}}{\sqrt{{c_f}^2 \;-\; {c_s}^2}} \tag{3.119}
$$

$$
\alpha_s \;=\; \frac{\sqrt{{c_f}^2 \;-\; a^2}}{\sqrt{{c_f}^2 \;-\; {c_s}^2}} \;=\; \frac{c_f}{b_x}\,\frac{\sqrt{{b_x}^2 \;-\; {c_s}^2}}{\sqrt{{c_f}^2 \;-\; {c_s}^2}} \tag{3.120}
$$

$$
\beta_z \;=\; \frac{\bar{B}_z}{\sqrt{{\bar{B}_y}^2 \;+\; {\bar{B}_z}^2}}\;, \tag{3.121}
$$

$$
\beta_y \;=\; \frac{\bar{B}_y}{\sqrt{{\bar{B}_y}^2 \;+\; {\bar{B}_z}^2}} \tag{3.122}
$$

平均磁場が0の場合 ($\bar{B}_y = \bar{B}_z = 0$) は β_y と β_z は

$$\beta_y = 1 \quad \text{and} \quad \beta_z = 0 \tag{3.123}$$

と定義される。また $c_f = c_s = a = b_x$ の場合、α_f と α_s は

$$\alpha_f = 1 \quad \text{and} \quad \alpha_s = 0 \tag{3.124}$$

$${\beta_y}^2 + {\beta_z}^2 = 1 \, , \tag{3.125}$$

$${\alpha_f}^2 + \frac{{b_x}^2}{{c_f}^2} {\alpha_s}^2 = 1 \tag{3.126}$$

と定義される。

$$w_2 = \frac{1}{2} \Big[-\bar{\rho} \left(\beta_z \Delta v - \beta_y \Delta w \right) \mathrm{sgn}(B_x) + \sqrt{\frac{\bar{\rho}}{4\pi}} \left(\beta_z \Delta B_y - \beta_y \Delta B_z \right) \Big] \tag{3.127}$$

$$w_6 = \frac{1}{2} \Big[\bar{\rho} \left(\beta_z \Delta v - \beta_y \Delta w \right) \mathrm{sgn}(B_x) + \sqrt{\frac{\bar{\rho}}{4\pi}} \left(\beta_z \Delta B_y - \beta_y \Delta B_z \right) \Big] \tag{3.128}$$

$$\begin{aligned} w_1 + w_7 &= \frac{\alpha_f}{{c_f}^2} \Big(\Delta P + \frac{\tilde{B}_y \Delta B_y + \tilde{B}_z \Delta B_z}{4\pi} \Big) \\ &+ \Big\{ \frac{\alpha_s}{a^2 c_f} \Big[(\gamma - 1) \, c_s^2 - (\gamma - 2) \, a^2 \Big] \sqrt{4\pi\bar{\rho}} \\ &+ (\gamma - 2) \sqrt{{\bar{B}_y}^2 + {\bar{B}_z}^2} \, \frac{\alpha_f}{{c_f}^2} \Big\} \, \frac{\beta_y \Delta B_y + \beta_z \Delta B_z}{4\pi} \, , \end{aligned} \tag{3.129}$$

$$w_1 - w_7 = \frac{\alpha_f}{c_f} \bar{\rho} \Delta u - \frac{\alpha_s c_s}{c_f a} \mathrm{sgn}(B_x) \bar{\rho} (\beta_y \Delta v + \beta_z \Delta w) \, , \tag{3.130}$$

$$\begin{aligned} w_3 + w_5 &= \frac{\alpha_s}{a^2} \Big(\Delta P + \frac{\tilde{B}_y \Delta B_y + \tilde{B}_z \Delta B_z}{4\pi} \Big) \\ &+ \Big\{ \alpha_f \Big[\frac{\gamma - 2}{c_f} - (\gamma - 1) \, \frac{c_f}{a^2} \Big] \sqrt{4\pi\bar{\rho}} \\ &+ (\gamma - 2) \sqrt{{\bar{B}_y}^2 + \bar{B}_z^2} \, \frac{\alpha_s}{a^2} \Big\} \, \frac{\beta_y \Delta B_y + \beta_z \Delta B_z}{4\pi} \, , \end{aligned} \tag{3.131}$$

$$w_3 - w_5 = \frac{\alpha_s b_x}{c_f a} \bar{\rho} \Delta u + \frac{\alpha_f}{a} \mathrm{sgn}(B_x) \bar{\rho} (\beta_y \Delta v + \beta_z \Delta w) \, , \tag{3.132}$$

$$w_4 = \rho_{j+1} - \rho_j - \alpha C_f \left(w_1 + w_7 \right) - \alpha_s \left(w_3 + w_5 \right) \, , \tag{3.133}$$

$$\Delta P = P_{j+1} - P_j \, , \tag{3.134}$$

$$\Delta B_y = B_{y,\,j+1} - B_{y,\,j} \, , \tag{3.135}$$

$$\Delta B_z = B_{z,\,j+1} - B_{z,\,j} \, . \tag{3.136}$$

$$
\boldsymbol{R}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2}{2} + \delta b^2 + \varepsilon \end{bmatrix}, \tag{3.137}
$$

and

$$
\varepsilon = \frac{\rho_{j+1} e_j - \rho_j e_j - (P_{j+1} - P_j)/(\gamma - 1)}{w_1}. \tag{3.138}
$$

3.6 さらに勉強する人へ

時間が限られているので、講義内容は基本的な概念に絞った。そのため実用的なコードを作成するのに必要な知識のいくつかを割愛せざるを得なかった。ここでは割愛した中でも重要な項目と、それについての参考書を示す。

1. 膨張衝撃波 (expansion shock) の回避

   ポイント 波の位相速度 λ_k が、$\lambda_{k,j} < 0$ かつ $\lambda_{k,j+1} > 0$ である時に、Roe の方法は不自然な解 (expansion shock) を生むことがある。回避法は良く知られている。

   参考書 Hirsch の教科書 pp. 467–469

2. 数値流束の 2 次精度化

   ポイント ここで講義した風上差分法は時間空間ともに 1 次精度であるが、これ時間空間ともに 2 次精度に拡張して使うのが普通である。よく用いられる方法として MUSCL 法がある。

   参考書 藤井の教科書 第 3 章

3. Godunov の定理と TVD 条件

   ポイント 高次精度の数値流束を使うと、1 次精度風上差分では回避された数値振動が現れやすくなる。Godunov の定理はこれを回避するための基礎理論として有名。また TVD 条件は数値振動が起こさないための十分条件として有名。簡単な解説は 1 章に掲載されている。

   参考書 藤井の教科書 第 3 章

4. 流速制限関数 (flux limiter)

   ポイント MUSCL 法で使われる。流速制限関数が必要であることは Godunov の定理より導かれる。1 章で紹介された minmod 関数はその 1 例。

参考書 藤井の教科書 第 3 章

5. MUSCL 法の (磁気) 流体力学方程式への適用

ポイント システム方程式に MUSCL を適用する手順は予想外に面倒である。特に磁気流体力学の場合は工夫が必要である。具体的な手順の例は Fukuda & Hanawa (2000) に載っている。

6. Property U

ポイント Property U が何故必要なのか。また Roe の平均はどのようにして導かれたのか。原理的な理解のために学習することは益。

参考書 Hirsch の教科書 pp. 463–465

7. 円筒座標および極座標での計算

ポイント 2 次元シミュレーションでは円筒座標や極座標が役に立つ場合が多い。これらの座標を用いるときは少し工夫が必要である。

8. 一般的な状態方程式への拡張

ポイント この講義や普通の教科書で扱うのは理想的な状態方程式だけである。しかし一般的な状態方程式の場合にも風上差分を拡張することができる。

参考書 Nobuta & Hanawa (1999)

参考文献

(1) 藤井孝藏, 1994, 流体力学の数値計算法, 東大出版会
(2) M. Brio and C. C. Wu, 1988, J. Comput. Phys., vol. 75, p. 400
(3) N. Fukuda and T. Hanawa, 2000, Astrophys. J., vol. 533, p. 911
(4) C. Hirsch, 1990, Numerical Computation of Internal and External Flows, vol. 2: Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows, Wiley
(5) K. Nobuta & T. Hanawa 1999, Astrophys. J., vol. 510, p. 614
(6) P. L. Roe, 1981, J. Comput. Phys., vol. 43, p. 357
(7) D. Ryu and T. W. Jones, Astrophys. J., vol. 442, p. 228